Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 30.11. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 12 Punkte

Zu welchen der folgenden Strukturen gibt es (i) Homomorphismen und (ii) Einbettungen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. Geben Sie jeweils eine solche Funktion an oder zeigen Sie, dass keine solche existiert.

(a) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \leq)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$;

(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{B} := (\{0,1\}^*, \preceq)$, wobei $u \preceq v$ gdw. $v = uz$ für ein $z \in \{0,1\}^*$;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \max, \min)$.

Aufgabe 2 — 6 Punkte

Ein Hamiltonkreis in einem Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist ein Kreis, der jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält. Welche der folgenden drei Bedingungen sind äquivalent?

(i) $\mathcal{G}$ enthält einen Hamiltonkreis.

(ii) Es gibt einen bijektiven Homomorphismus von einem Kreis zu $\mathcal{G}$.

(iii) Es gibt einen starken Homomorphismus von einem Kreis der Länge $|V|$ zu $\mathcal{G}$.

Aufgabe 3 — 6 Punkte

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf einer gegebenen linearen Ordnung $(A, <)$ durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad \text{die Menge } \{c \in A \ : \ a < c < b \text{ oder } b < c < a\} \text{ ist endlich.}$$

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ heißen *Blöcke*. $(A, <)/\sim$ ist die lineare Ordnung, die aus $(A, <)$ entsteht, indem jeder Block durch ein einzelnes Element ersetzt wird.

$(A, <)$ heißt *dicht*, wenn A mindestens 2 Elemente enthält und für alle Elemente $a < b$ ein drittes existiert mit $a < c < b$. Dagegen heißt $(A, <)$ *diskret*, wenn

- zu jedem $a \in A$ entweder kein $b < a$ existiert oder es ein $b < a$ gibt, so dass kein c mit $b < c < a$ existiert, sowie
- zu jedem $a \in A$ entweder kein $b > a$ existiert oder es ein $b > a$ gibt, so dass kein c mit $a < c < b$ existiert.

(a) Geben Sie eine diskrete lineare Ordnung $(A, <)$ an, so dass $(A, <)/\sim$ dicht ist.

(b) Gibt es eine dichte lineare Ordnung $(B, <)$, so dass $(B, <)/\sim$ diskret ist?

Aufgabe 4 9 Punkte

Ein unendliches Wort $\alpha = \alpha_0\alpha_1\dots$ über einem endlichen Alphabet Σ kann durch die Wortstruktur $\mathfrak{W}_\alpha = (\mathbb{N}, <, (P_c)_{c\in\Sigma})$ kodiert werden, wobei $P_c = \{i \in \mathbb{N} : \alpha_i = c\}$. Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}$ definiert dann die ω-*Sprache* $L(\varphi) := \{\alpha \in \Sigma^\omega : \mathfrak{W}_\alpha \models \varphi\}$.

(a) Beschreiben Sie die durch folgende Sätze definierten ω-Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

(i) $\varphi_0 := \neg\exists x(P_a x \vee P_b x)$;

(ii) $\varphi_1 := \forall x \exists y(x \leq y \wedge P_a y)$.

(b) Geben Sie FO-Sätze an, welche folgende ω-Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ definieren:

(i) $\{(ab)^\omega\} = \{abab\dots\}$;

(ii) $\{x \cdot aba \cdot y : x \in \Sigma^*, y \in \Sigma^\omega\}$.