Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 7.12. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 6 Punkte

Seien E und R zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol.

(i) Sei $\varphi := \forall y[\exists z(Exz \land \neg Eyz) \to \forall x(Efxyz \land Rxgy)]$. Berechnen Sie $\varphi[x/fxy,\ y/gz,\ z/fxx]$.

(ii) Formen Sie $\psi := [\forall x \exists y Exy \land \forall x \forall y \forall z(Exy \land Exz \to y = z)] \to \forall x Exfyx$ in eine äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform um.

(iii) Bilden Sie die Skolem-Normalform von ψ'.

Aufgabe 2 6 Punkte

Formulieren Sie in der Prädikatenlogik folgende Aussagen über die Expansion $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}, +, \cdot, f)$ der reellen Arithmetik um eine einstellige Funktion f:

(i) f ist gleichmäßig stetig; (ii) f ist auf $\mathbb{R}$ ableitbar.

Aufgabe 3 4 Punkte

Eine Formelmenge $\Phi \subset \mathrm{FO}$ heißt *unabhängig*, wenn für kein $\varphi \in \Phi$ gilt: $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Untersuchen Sie die in der Vorlesung vorgestellten Axiomensysteme $\Phi_<$ und Φ_∞ auf Unabhängigkeit.

Aufgabe 4 6 Punkte

Sei τ eine relationale Signatur und $\varphi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine quantorenfreie Formel. Zeigen Sie, dass der Satz $\exists x_1 \dots \exists x_k \forall y_1 \dots \forall y_n \varphi$ genau dann erfüllbar ist, wenn er ein Modell mit höchstens k Elementen besitzt.

Sei nun $\sigma = \{f\}$ mit einstelligem Funktionssymbol f. Geben Sie einen erfüllbaren $\mathrm{FO}(\sigma)$-Satz der obigen Form an, der kein endliches Modell besitzt.

Aufgabe 5 6+4* Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol, R ein zweistelliges Relationssymbol und P ein einstelliges Relationssymbol. Geben Sie die Aussagen der folgenden Formeln umgangssprachlich wieder. Welche der Formeln sind erfüllbar? Welche besitzen ein endliches Modell?

(a) $\forall x(Px \leftrightarrow Pfx) \land \exists x Px \land \exists x \neg Px$

(b) $\forall x \forall y \forall z((Rxy \land Ryz) \to Rxz) \land \forall x(\neg Rxx \land Rxfx)$

(c) $$\Big(\exists x_1 \cdots \exists x_6 \bigwedge_{i<k} x_i \neq x_k \land \forall x \forall y(Rxy \leftrightarrow Ryx)\Big) \to$$
$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \Big(\bigwedge_{i<k}(x_i \neq x_k \land Rx_ix_k) \lor \bigwedge_{i<k}(x_i \neq x_k \land \neg Rx_ix_k)\Big)$$

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie, dass die Formel aus (c) allgemeingültig ist.