

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 14.12. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Sei $\mathfrak{V} = (V, \in, p)$ die Struktur der Mengenlehre, deren Universum V aus allen Mengen besteht, erweitert um eine injektive zweistellige Funktion $p : V \times V \rightarrow V$. Eine solche Funktion heißt *Paarfunktion*, da man Paare (x, y) durch das Element $p(x, y)$ kodieren kann. Mit Hilfe von p können wir das kartesische Produkt definieren als

$$x \times y := \{p(u, v) : u \in x, v \in y\}.$$

Geben Sie FO-Formeln an, welche besagen, dass

- (a) $z = x \times y$;
- (b) z eine binäre Relation über der Menge x ist;
- (c) z der Graph einer Funktion von x nach y ist;
- (d) die Mengen x und y gleichmächtig sind.

Aufgabe 2

4 Punkte

Wir betrachten den Körper mit zwei Elementen $\mathfrak{F}_2 := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ und die Formel

$$\varphi := \forall x(x + x = x \rightarrow \exists y(x + y = y \wedge x \cdot y = x)).$$

Zeichnen Sie den Spielgraphen zum Auswertungsspiel $\text{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler.

Aufgabe 3

6 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Definitionen für die Mengen W_σ^n von Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, in höchstens n Zügen zu gewinnen:

- (i) $W_\sigma^0 := \{v \in V_{1-\sigma} : vE = \emptyset\}$
 $W_\sigma^{n+1} := \{v \in V_\sigma : vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} : vE \subseteq W_\sigma^n\}$
- (ii) $\widetilde{W}_\sigma^0 := \{v \in V_{1-\sigma} : vE = \emptyset\}$
 $\widetilde{W}_\sigma^{n+1} := \widetilde{W}_\sigma^n \cup \{v \in V_\sigma : vE \cap \widetilde{W}_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} : vE \subseteq \widetilde{W}_\sigma^n\}$

Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind, d. h. es gilt $W_\sigma^n = \widetilde{W}_\sigma^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

9 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Spiele (V, E, v_0) , in denen die Spieler, nachdem Spieler 1 in v_0 anfängt, immer abwechselnd ziehen, egal auf welcher Position sie sich befinden. Ein Spieler gewinnt ein solches Spiel, falls sein Gegner nicht mehr ziehen kann. Für zwei solche Spiele $\mathcal{G} = (V, E, v_0)$ und $\mathcal{H} = (V', E', v'_0)$ definieren wir die folgenden Operationen:

- (i) Die Komposition $\mathcal{G} \parallel \mathcal{H} := (V \times V', E^\parallel, (v_0, v'_0))$ ist das Spiel, in dem jeder Spieler sich aussuchen kann, ob er einen Zug in der ersten oder der zweiten Komponente ausführt:

$$E^\parallel := \{((v, w), (v', w)) : v' \in vE\} \cup \{((v, w), (v, w')) : w' \in wE'\}.$$

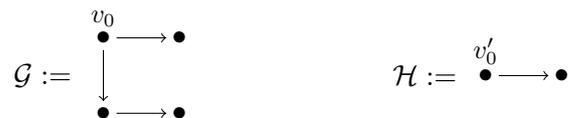
- (ii) Im Produkt $\mathcal{G} \times \mathcal{H} := (V \times V', E^\times, (v_0, v'_0))$ sind die Positionen so wie in der Komposition, es wird aber in beiden Komponenten gleichzeitig gezogen:

$$E^\times := \{((v, w), (v', w')) : v' \in vE \text{ und } w' \in wE'\}.$$

- (iii) Die Sequenz $\mathcal{G} \circ \mathcal{H} := (V \dot{\cup} V', E^\circ, v_0)$ ist das Spiel, in dem zuerst in \mathcal{G} gespielt wird, bis einer der Spieler nicht mehr weiterziehen kann. Dieser Spieler zieht dann zu v'_0 in \mathcal{H} , und das Spiel wird in \mathcal{H} weitergeführt, bis eine Endposition von \mathcal{H} erreicht wird:

$$E^\circ := E \cup E' \cup \{(w, v'_0) : wE = \emptyset\}.$$

- (a) Seien



Geben Sie $\mathcal{G} \parallel \mathcal{H}$, $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ und $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ an.

- (b) Nehmen wir an, dass Spieler 0 Gewinnstrategien für \mathcal{G} und \mathcal{H} hat. Beweisen oder widerlegen Sie, dass er dann immer für $\mathcal{G} \parallel \mathcal{H}$, $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ und $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ auch eine Gewinnstrategie hat.