Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 14.12. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Sei $\mathfrak{V} = (V, \in, p)$ die Struktur der Mengenlehre, deren Universum V aus allen Mengen besteht, erweitert um eine injektive zweistellige Funktion $p : V \times V \to V$. Eine solche Funktion heißt *Paarfunktion*, da man Paare (x, y) durch das Element $p(x, y)$ kodieren kann. Mit Hilfe von p können wir das kartesische Produkt definieren als

$$x \times y := \{p(u, v) \ : \ u \in x,\ v \in y\}\,.$$

Geben Sie FO-Formeln an, welche besagen, dass

(a) $z = x \times y$;

(b) z eine binäre Relation über der Menge x ist;

(c) z der Graph einer Funktion von x nach y ist;

(d) die Mengen x und y gleichmächtig sind.

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Wir betrachten den Körper mit zwei Elementen $\mathfrak{F}_2 := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ und die Formel

$$\varphi := \forall x\big(x + x = x \to \exists y(x + y = y \land x \cdot y = x)\big).$$

Zeichnen Sie den Spielgraphen zum Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler.

Aufgabe 3 — 6 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Definitionen für die Mengen W_σ^n von Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, in höchstens n Zügen zu gewinnen:

$$(i) \qquad \begin{aligned} W_\sigma^0 &:= \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\} \\ W_\sigma^{n+1} &:= \{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq W_\sigma^n\} \end{aligned}$$

$$(ii) \qquad \begin{aligned} \widetilde{W}_\sigma^0 &:= \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\} \\ \widetilde{W}_\sigma^{n+1} &:= \widetilde{W}_\sigma^n \cup \Big\{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap \widetilde{W}_\sigma^n \neq \emptyset\Big\} \cup \Big\{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq \widetilde{W}_\sigma^n\Big\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind, d. h. es gilt $W_\sigma^n = \widetilde{W}_\sigma^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 9 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir Spiele (V, E, v_0), in denen die Spieler, nachdem Spieler 1 in v_0 anfängt, immer abwechselnd ziehen, egal auf welcher Position sie sich befinden. Ein Spieler gewinnt ein solches Spiel, falls sein Gegner nicht mehr ziehen kann. Für zwei solche Spiele $\mathcal{G} = (V, E, v_0)$ und $\mathcal{H} = (V', E', v_0')$ definieren wir die folgenden Operationen:

(i) Die Komposition $\mathcal{G} \,||\, \mathcal{H} := \big(V \times V', E^{||}, (v_0, v_0')\big)$ ist das Spiel, in dem jeder Spieler sich aussuchen kann, ob er einen Zug in der ersten oder der zweiten Komponente ausführt:

$$E^{||} := \big\{\big((v,w),(v',w)\big) \ : \ v' \in vE\big\} \cup \big\{\big((v,w),(v,w')\big) \ : \ w' \in wE'\big\}.$$

(ii) Im Produkt $\mathcal{G} \times \mathcal{H} := \big(V \times V', E^{\times}, (v_0, v_0')\big)$ sind die Positionen so wie in der Komposition, es wird aber in beiden Komponenten gleichzeitig gezogen:

$$E^{\times} := \big\{\big((v,w),(v',w')\big) \ : \ v' \in vE \text{ und } w' \in wE'\big\}.$$

(iii) Die Sequenz $\mathcal{G} \circ \mathcal{H} := \big(V \,\dot{\cup}\, V', E^{\circ}, v_0\big)$ ist das Spiel, in dem zuerst in $\mathcal{G}$ gespielt wird, bis einer der Spieler nicht mehr weiterziehen kann. Dieser Spieler zieht dann zu v_0' in $\mathcal{H}$, und das Spiel wird in $\mathcal{H}$ weitergeführt, bis eine Endposition von $\mathcal{H}$ erreicht wird:

$$E^{\circ} := E \cup E' \cup \{(w, v_0') \ : \ wE = \emptyset\}.$$

(a) Seien

$$\mathcal{G} := \begin{tikzcd} \overset{v_0}{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathcal{H} := \begin{tikzcd} \overset{v_0'}{\bullet} \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Geben Sie $\mathcal{G} \,||\, \mathcal{H}$, $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ und $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ an.

(b) Nehmen wir an, dass Spieler 0 Gewinnstrategien für $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ hat. Beweisen oder widerlegen Sie, dass er dann immer für $\mathcal{G} \,||\, \mathcal{H}$, $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ und $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ auch eine Gewinnstrategie hat.