Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

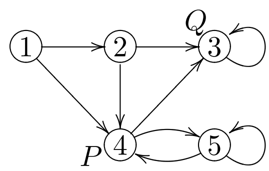
9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 11.1. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Sei $\mathcal{K} := (V, E, P, Q)$ das folgende Transitionssystem:



(a) Für welche Zustände v gilt $\mathcal{K}, v \models \Box\Diamond\Diamond(P \lor \Diamond P)$?

(b) Wandeln Sie die Formel $\Box\Diamond\Diamond(P \lor \Diamond P)$ in eine äquivalente Formel der Prädikatenlogik um.

(c) Geben Sie modallogische Formeln an, welche besagen, dass

  (i) von allen Nachfolgern des aktuellen Zustands aus in einem Schritt ein Zustand erreicht werden kann, an dem Q gilt;

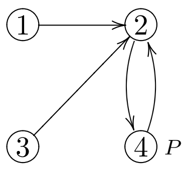
  (ii) es einen Pfad der Länge höchstens 3 zu einem Zustand gibt, an welchem P gilt.

  (iii) es einen Pfad der Länge 4 gibt, auf dem abwechselnd P und $\neg P$ gilt.

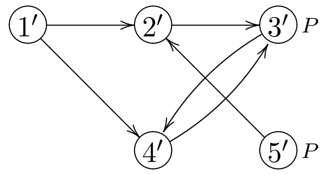
Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Bestimmen Sie für folgende Kripkestrukturen $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ die Menge aller Knotenpaare (v, w) mit $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', w$.

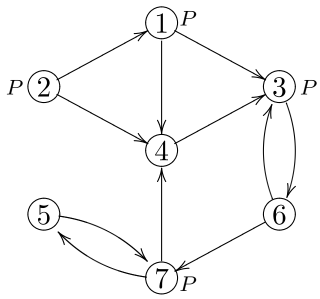
$\mathcal{K}$:



$\mathcal{K}'$:



(b) Bestimmen Sie für die folgende Kripkestruktur $\mathcal{K}$ die Menge aller Knotenpaare (v, w) mit $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}, w$, und geben Sie für alle Paare (v, w), für die dies nicht der Fall ist, eine Modalformel φ an, so dass $\mathcal{K}, v \models \varphi$ aber $\mathcal{K}, w \not\models \varphi$ gilt.



Aufgabe 3 8 Punkte

Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel der Modallogik an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) $\varphi_a(x) := \forall y \exists z(\neg Exy \vee Eyz)$;

(b) $\varphi_b(x) := \forall y \exists z(Exy \vee Eyz)$;

(c) $\varphi_c(x) := \exists y(Eyx \wedge Py)$;

(d) $\varphi_d(x) := Exx$;

(e) $\varphi_e(x) := \forall y(Qy \rightarrow \forall z(Exz \wedge Ezy \rightarrow Pz))$.

Aufgabe 4 5 Punkte

Eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}$ (über der Signatur einer Kripkestruktur) ist *sicher für Bisimulationen*, wenn für alle Bisimulationen Z zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ gilt: Wenn $(v, v') \in Z$ und ein w existiert, so dass $\mathcal{K} \models \varphi(v, w)$, dann existiert ein w', so dass $\mathcal{K}' \models \varphi(v', w')$ und $(w, w') \in Z$. In anderen Worten: Wenn die Hin- und Her-Bedingungen für die gegebenen Relationen E_a von $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$ gelten, dann auch für die durch φ definierten neuen Relationen.

Welche der folgenden Formeln sind sicher für Bisimulationen?

(a) $\varphi_a(x, y) = E_a xy \vee E_b xy$

(b) $\varphi_b(x, y) = \exists z(E_a xz \wedge E_b zy)$

(c) $\varphi_c(x, y) = E_a xy \wedge E_b xy$

(d) $\varphi_d(x, y) = \neg E_a xy$

(e) $\varphi_e(x, y) = (y = x \wedge \forall z \bigwedge_{a \in A} \neg E_a xz)$

Aufgabe 5* 18* Punkte

Für eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{ML}$ und ein Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E, P)$ schreiben wir

$$\mathcal{K} \models_\forall \Phi \quad \text{gdw} \quad \mathcal{K}, v \models \varphi \qquad \text{für alle } v \in V,\ \varphi \in \Phi.$$

Wir sagen, eine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{ML}$ *axiomatisiert* eine Eigenschaft von Graphen, wenn gilt:

- Ist (V, E) ein Graph mit dieser Eigenschaft, dann gilt $(V, E, P) \models_\forall \Phi$ für alle $P \subseteq V$, kurz: $(V, E) \models_\forall \Phi$.
- Hat (V, E) die Eigenschaft nicht, so gibt es ein $P \subseteq V$ mit $(V, E, P) \not\models_\forall \Phi$.

(a) Welche Klassen von Graphen werden durch folgende Formeln axiomatisiert?

(i) $P \rightarrow \Diamond P$

(ii) $\Box P \rightarrow \Diamond P$

(iii) $\Diamond P \rightarrow \Box P$

(b) Beweisen Sie, dass die Klasse der transitiven Graphen axiomatisiert wird durch

$$\Phi := \{\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi \ : \ \varphi \in \mathrm{ML}\}.$$

Die mit * versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben, für deren Lösung es Zusatzpunkte gibt.

(c) Ein Graph heißt *euklidisch*, wenn er die Eigenschaft $\forall x \forall y \forall z(Exy \wedge Exz \rightarrow Eyz)$ erfüllt. Geben Sie eine Menge Ψ an, welche die Klasse der euklidischen Graphen axiomatisiert.

(d) Sei $\varphi_L = \Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow \Box P$ die sogenannte Löb-Formel, die eine große Rolle in Beweislogiken spielt. (Betrachten Sie die Aussage der Formel, wenn man $\Box\varphi$ als „es ist beweisbar, dass φ gilt" liest). Zeigen Sie, dass φ_L die Klasse der transitiven Graphen, in denen es keine unendlichen Pfade $v_0, v_1, \dots$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt, definiert. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Eigenschaft nicht in der Prädikatenlogik axiomatisierbar ist, d. h. dass es keinen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\{E\})$ gibt, so dass $(V, E) \models \psi$ gdw. $(V, E) \models_\forall \varphi_L$.
Hinweis: Sie können den Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik verwenden, der analog zum Kompaktheitssatz für die Aussagenlogik formuliert ist (s. Skript Satz 6.13, Abschnitt 6.4).

(e) Einerseits lässt sich jede modallogische Formel in eine Formel der Prädikatenlogik übersetzen. Andererseits zeigt der vorherige Aufgabenteil, dass modallogische Formeln Eigenschaften von Graphen axiomatisieren können, die nicht in der Prädikatenlogik axiomatisierbar sind. Erklären Sie diesen scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 6* 8* Punkte

Seien $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$ und $\mathcal{K}' = (V', (E'_a)_{a \in A}, (P'_i)_{i \in I})$ zwei Kripkestrukturen. Eine Relation $Z \subseteq V \times V'$ heißt *Simulation* von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$, falls für alle $(v, v') \in Z$ gilt:

- $v \in P_i \;\Rightarrow\; v' \in P'_i$ für alle $i \in I$ und
- für alle $a \in A$ und alle $w \in V$ mit $(v, w) \in E_a$ gibt es ein $w' \in V'$ mit $(v', w') \in E'_a$ und $(w, w') \in Z$.

(a) Eine Formel $\varphi \in \mathrm{ML}$ heißt *positiv existentiell*, falls sie keine negierten Propositionen enthält und nur aus den Junktoren $\wedge, \vee$ sowie $\Diamond$ als einziger Modalität aufgebaut ist.

Sei Z eine Simulation von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$. Zeigen Sie, dass für alle positiv existentiellen Formeln φ und alle $(v, v') \in Z$ gilt:
$$\mathcal{K}, v \models \varphi \implies \mathcal{K}', v' \models \varphi.$$

(b) Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei Kripkestrukturen, so dass sowohl eine nicht-leere Simulation von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ als auch eine nicht-leere Simulation von $\mathcal{K}'$ nach $\mathcal{K}$ existiert. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann auch eine nicht-leere *Bi*simulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ existiert.

Die mit * versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben, für deren Lösung es Zusatzpunkte gibt.