

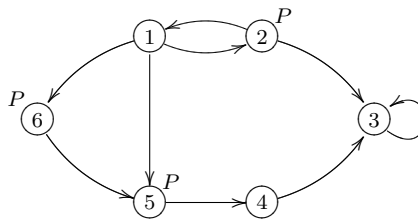
10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 18.1. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

6 Punkte

Gegeben sei das Transitionssystem $\mathcal{K} = (\{1, \dots, 6\}, E, P)$ wie folgt:



Werten Sie die folgenden CTL-Formeln in \mathcal{K} aus:

- (a) $AG EF P$;
- (b) $AF EG \neg P$;
- (c) $EG ((P \rightarrow AX \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow AX P))$.

Aufgabe 2

12 Punkte

Konstruieren Sie CTL-Formeln, welche besagen, dass

- (a) auf allen Pfaden abwechselnd P und $\neg P$ gilt;
- (b) auf allen Pfaden unendlich oft P vorkommt;
- (c) alle Pfade der Länge 4 zu einem Zustand führen, an dem P gilt;
- (d) es einen Pfad gibt, auf welchem dreimal direkt hintereinander P gilt.

Aufgabe 3

12 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen in den jeweiligen Strukturen elementar definierbar sind:

- (a) die Menge der Primpotenzen in $(\mathbb{N}, |)$ (wobei $x | y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} y = x \cdot z$);
- (b) die Menge der Zweierpotenzen in (\mathbb{N}, \cdot) ;
- (c) die Menge \mathbb{Z} in $(\mathbb{Q}, +)$;
- (d) die Menge \mathbb{Z} in (\mathbb{Q}, \cdot) .

Aufgabe 4

6+6* Punkte

Wir sagen, dass eine τ -Struktur \mathfrak{A} eine *entscheidbare Theorie* hat, wenn man zu jedem FO-Satz ψ über τ algorithmisch entscheiden kann, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt.

- (a) Zeigen Sie: Hat $(\mathbb{Z}, +, <)$ eine entscheidbare Theorie, so auch $(\mathbb{N}, +, <)$. Beweisen Sie dazu, dass man zu jedem FO-Satz ψ über der Signatur $\{+, <\}$ algorithmisch einen FO-Satz $\hat{\psi}$ über der gleichen Signatur konstruieren kann, so dass $(\mathbb{N}, +, <) \models \psi \Leftrightarrow (\mathbb{Z}, +, <) \models \hat{\psi}$.
- (b) Zeigen Sie die Umkehrung: Hat $(\mathbb{N}, +, <)$ eine entscheidbare Theorie, so auch $(\mathbb{Z}, +, <)$.

Hinweis: Identifizieren Sie die ganzen Zahlen mit den Klassen der Äquivalenzrelation \sim auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - y = x' - y'$.

Aufgabenteil (b) ist eine Zusatzaufgabe!