Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

10. Übung Mathematische Logik

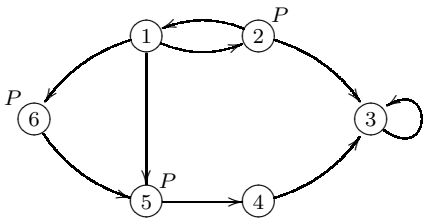
Abgabe: bis Donnerstag, den 18.1. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

6 Punkte

Gegeben sei das Transitionssystem $\mathcal{K} = (\{1, \ldots, 6\}, E, P)$ wie folgt:



Werten Sie die folgenden CTL-Formeln in $\mathcal{K}$ aus:

(a) $\mathrm{AG}\,\mathrm{EF}\,P$;

(b) $\mathrm{AF}\,\mathrm{EG}\,\neg P$;

(c) $\mathrm{EG}\,((P \to \mathrm{AX}\,\neg P) \wedge (\neg P \to \mathrm{AX}\,P))$.

Aufgabe 2

12 Punkte

Konstruieren Sie CTL-Formeln, welche besagen, dass

(a) auf allen Pfaden abwechselnd P und $\neg P$ gilt;

(b) auf allen Pfaden unendlich oft P vorkommt;

(c) alle Pfade der Länge 4 zu einem Zustand führen, an dem P gilt;

(d) es einen Pfad gibt, auf welchem dreimal direkt hintereinander P gilt.

Aufgabe 3

12 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen in den jeweiligen Strukturen elementar definierbar sind:

(a) die Menge der Primpotenzen in $(\mathbb{N}, |)$ (wobei $x \mid y :\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N}\ y = x \cdot z$);

(b) die Menge der Zweierpotenzen in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(c) die Menge $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Q}, +)$;

(d) die Menge $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

Aufgabe 4 6+6* Punkte

Wir sagen, dass eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ *eine entscheidbare Theorie hat*, wenn man zu jedem FO-Satz ψ über τ algorithmisch entscheiden kann, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Hat $(\mathbb{Z}, +, <)$ eine entscheidbare Theorie, so auch $(\mathbb{N}, +, <)$. Beweisen Sie dazu, dass man zu jedem FO-Satz ψ über der Signatur $\{+, <\}$ algorithmisch einen FO-Satz $\hat{\psi}$ über der gleichen Signatur konstruieren kann, so dass $(\mathbb{N}, +, <) \models \psi \Leftrightarrow (\mathbb{Z}, +, <) \models \hat{\psi}$.

(b) Zeigen Sie die Umkehrung: Hat $(\mathbb{N}, +, <)$ eine entscheidbare Theorie, so auch $(\mathbb{Z}, +, <)$.

Hinweis: Identifizieren Sie die ganzen Zahlen mit den Klassen der Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - y = x' - y'$.

Aufgabenteil (b) ist eine Zusatzaufgabe!