Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 25.1. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

12 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) Die Klasse $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ für eine feste endliche Struktur $\mathfrak{A}$.

(b) Die Klasse aller zykelfreien ungerichteten Graphen.

(c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen vom Durchmesser höchstens 3, d. h. aller Graphen, von denen je zwei Knoten durch einen Pfad der Länge maximal 3 verbunden sind.

(d) Die Klasse aller Äquivalenzstrukturen mit unendlich vielen Äquivalenzklassen.

Aufgabe 2

10 Punkte

Welche der folgenden Erweiterungen der Theorie T der linearen Ordnungen sind vollständig?

(a) Die Theorie der unendlichen linearen Ordnungen;

(b) die Theorie der diskreten linearen Ordnungen;

(c) die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (d.h., jedes Element hat genau einen direkten Nachfolger und genau einen direkten Vorgänger);

(d) die Theorie $\{\psi \ : \ T, \varphi \models \psi\}$, wobei φ ein Satz ist, der besagt, dass es genau 13 Elemente gibt;

(e) die Theorie der dichten linearen Ordnungen?

Aufgabe 3

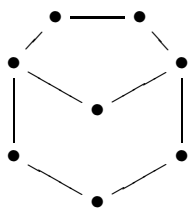
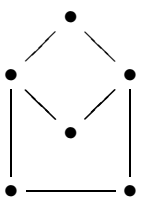
6 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A}_n = (A, E)$ eine Struktur mit einer Äquivalenzrelation E, welche unendlich viele Äquivalenzklassen hat, die alle die Größe n haben. Bestimmen Sie für alle Zahlen m, n_0, $n_1 \in \mathbb{N}$, ob gilt $\mathfrak{A}_{n_0} \equiv_m \mathfrak{A}_{n_1}$.

(b) Geben Sie für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und Äquivalenzrelationen E und F ein Kriterium dafür an, dass $(A, E) \not\equiv_m (B, F)$?

Aufgabe 4 9 Punkte

Bestimmen Sie für die folgenden Strukturen jeweils die kleinste Zahl m, so dass im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ der Herausforderer gewinnt, in $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aber die Duplikatorin. Geben Sie entsprechende Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin an.

(a) $\mathfrak{A} :=$  und $\mathfrak{B} :=$ 

(b) $\mathfrak{A} := \big(\{0,1\}^*, \cdot\big)$ und $\mathfrak{B} := \big(\mathbb{N}, +\big)$, wobei $\cdot$ der Graph der Konkatenation von Wörtern und $+$ der Graph der Addition ist;

(c) $\mathfrak{A} := \big(\mathbb{N}, |\big)$ und $\mathfrak{B} := \big(\mathbb{Z}, |\big)$.