Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 1.2 um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 6 Punkte

Betrachten sie die folgenden Aussagen.

(i) "Everybody loves my baby, but my baby loves nobody but me."

(ii) "Everybody loves my baby, but I love nobody but me."

(iii) "Everybody loves my baby, but everybody loves nobody but me."

(a) Formalisieren Sie die drei Aussagen durch geeignete FO-Formeln $\varphi_i, \varphi_{ii}, \varphi_{iii}$ über der Signatur $\{loves, me, mybaby\}$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls für alle Paare i, j, ob $\varphi_i \rightarrow \varphi_j$ allgemeingültig ist.

(c) Finden Sie für jedes φ_i die kürzeste Formel ψ_i, die folgende Bedingungen erfüllt: die Formel ψ_i ist nicht allgemeingültig und $\varphi_i \Rightarrow \psi_i$ ist gültig. Beweisen Sie dies im Sequenzenkalkül.

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass in den Regeln $(\exists \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \forall)$ aus dem Skript die Bedingung, dass c nicht in Γ, Δ und ψ vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

Aufgabe 3 — 16 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Strukturen $(T, \preceq)$ wobei $T \subseteq \{0,1\}^*$ eine präfix-abgeschlossene Menge von Wörtern ist und

$$x \preceq y \ \text{ :gdw } \ y = xz \text{ für ein } z \in \{0,1\}^*.$$

Die Struktur $(T, \preceq)$ identifizieren wir mit einem Baum, wobei das leere Wort die Wurzel des Baumes ist und es eine Kante zwischen den Knoten $w, v \in T$ gibt wenn $v = w0$ oder $v = w1$ ist. Zu welchen der folgenden Teilklassen $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$ gibt es eine Formelmenge $\Phi \subseteq$ FO, so dass für alle $\mathfrak{T} \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\mathfrak{T} \models \Phi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{K}_i\,.$$

Für welche Teilklassen kann Φ endlich gewählt werden?

(a) $\mathcal{K}_a = \{(\{0,1\}^*, \preceq)\}$.

(b) $\mathcal{K}_b$: die Klasse aller Bäume, in welchen es einen unendlichen Pfad gibt.

(c) $\mathcal{K}_c$: die Klasse aller Bäume ohne endliche Pfade.

(d) $\mathcal{K}_d$: die Klasse aller Bäume mit unendlich vielen unendlichen Pfaden.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass folgende Teilklassen nicht axiomatisierbar sind:

(e) $\mathcal{K}_e$: die Klasse aller Bäume ohne unendliche Pfade.

(f) $\mathcal{K}_f$: die Klasse aller Bäume mit endlich vielen unendlichen Pfaden.

Aufgabe 4 9 Punkte

Sei $\mathfrak{T} := (\{0,1\}^*, s_0, s_1, \preceq, \mathrm{el})$ der binäre Baum mit

$$\begin{aligned} s_0(x) &:= x0,\ \ s_1(x) := x1, \\ x \preceq y &\ :\text{gdw}\ \ y = xz \text{ für ein } z, \\ \mathrm{el}(x,y) &\ :\text{gdw}\ \ |x| = |y|. \end{aligned}$$

Ein deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$ ist ein Tupel $\mathcal{A} := (Q, \delta, q_0, F)$, wobei Q eine endliche Menge der Zustände ist, $\delta\ :\ Q \times \{0,1\} \to Q$ die Transitionsfunktion, $q_0 \in Q$ der Anfangszustand und $F \subseteq Q$ die Endzustände. Der Lauf von $\mathcal{A}$ auf einem Eingabewort $w = w_0 w_1 \dots w_n$ ist die Folge der angenommenen Zustände

$$L_{\mathcal{A}}(w) = q_0 q_1 \dots q_{n+1} \text{ mit } q_{i+1} = \delta(q_i, w_i).$$

$\mathcal{A}$ *akzeptiert* ein Wort w gdw. der letzte Zustand $q_{n+1} \in F$. (Man beachte, dass der Lauf ein Symbol länger ist als die Eingabe.)

Wir können einen Lauf $q_0 \dots q_{n+1}$ als Tupel von Binärwörtern $x_q \in \mathfrak{T}$ kodieren, wobei das i-te Bit von x_q gleich 1 ist, wenn der Zustand q_i gleich q ist. Geben Sie für festes $\mathcal{A}$ Formeln an, welche in $\mathfrak{T}$ besagen, dass

(a) das Symbol von x an Position $|y|$ eine 1 ist, d. h. $x = x'1x''$ mit $|x'| = |y|$;

(b) die in $(x_q)_{q \in Q}$ kodierte Zustandsfolge ein gültiger Lauf von $\mathcal{A}$ auf Eingabe y ist;

(c) der Automat $\mathcal{A}$ das Wort y akzeptiert.