Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

13. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 8.2. um 8:15 Uhr am Lehrstuhl oder **vor Beginn** der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Alle Aufgaben dieser Übung sind Zusatzaufgaben!

Aufgabe 1 10* Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der endlich verzweigten ungerichteten Graphen.

(b) Die Klasse aller bipartiten Graphen. (Sie können ausnutzen, dass ein ungerichteter Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.)

(c) Die Klasse der Graphen, die einen zu $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$ isomorphen Teilgraphen enthalten (wobei die Teilmengenrelation als Kantenrelation aufzufassen ist).

(d) Die Klasse der Graphen, die isomorph zu $(\mathbb{N}, <)$ sind.

(e) Die Klasse aller Strukturen (A, f, P) mit einstelligem Funktionssymbol f und einstelligem Relationssymbol P, für die P eine Substruktur induziert.

Aufgabe 2 12* Punkte

Sei C eine Menge von Konstanten mit $c_0, c_1 \in C$. Sei ferner $T := \{c_i = c_j : c_i, c_j \in C - \{c_0\}\} \cup \{f^2c_0 = f^2c_1, f^5c_0 = fc_1\} \cup \{Rc_0, Rf^3c_1\}$, Σ die kleinste Menge, die T enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$.

(c) Ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ein Modell von T?

(d) Sei $T' := T \cup \{\exists x(Rx \wedge Rfx)\}$. (Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution.) Zeigen Sie: T' ist erfüllbar, aber $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$.

Aufgabe 3 4* Punkte

Sei $\tau = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ die Signatur der geordneten Körper. Ein geordneter Körper $\mathfrak{K}$ heißt *archimedisch*, wenn es zu jedem $a \in K$ eine natürliche Zahl n gibt mit $a < \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}}$. Beispiele solcher archimedischer Körper sind der geordnete Körper der rationalen und der geordnete Körper $\mathfrak{R}^<$ der reellen Zahlen.

Zeigen Sie, dass die Klasse der archimedischen Körper nicht FO-axiomatisierbar ist.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es einen zu $\mathfrak{R}^<$ elementar äquivalenten Körper gibt, der nicht archimedisch ist.