Aufgabe 1

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(a) $((X \wedge Y) \rightarrow Z) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z))$

(b) $(X \rightarrow (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z))$

(c) $\neg(\neg X \rightarrow (Y \rightarrow \neg X))$

Aufgabe 2

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{0, \rightarrow\}$ bzw. $\{1, \rightarrow\}$ funktional vollständig sind.

(b) Sei $f \in B^3$ die durch $f(x, y, z) := 1 - \min(x, y, z)$ definierte Boolesche Funktion.

   (i) Stellen Sie die Ausdrücke $f(x, y, z)$ und $f\big(x, f(x, y, z), z\big)$ durch aussagenlogische Formeln dar.

   (ii) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

Aufgabe 3

Jedem (ungerichteten) Graphen mit Knoten $1, \ldots, n$ ordnen wir eine aussagenlogische Interpretation in folgender Weise zu: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(a) Beschreiben Sie einen beliebigen Graphen mit 5 Knoten durch eine aussagenlogische Formel.

(b) Konstruieren Sie zunächst für $n = 5$, $k = 3$ und dann für beliebige Größen n und $k < n$ Formeln $\varphi_{n,k}$, die ausdrücken, dass im Graph ein Pfad der Länge k existiert.