Aufgabe 1

Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent?

(a) $(X \to Z) \vee (Y \to Z)$;

(b) $X \to (Y \vee Z)$;

(c) $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y)$;

(d) $\neg(X \vee Y \vee Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$.

Aufgabe 2

Prüfen Sie mit Hilfe des Erfüllbarkeitstests aus der Vorlesung, ob folgende Formel erfüllbar ist:

$$(A \wedge B \wedge C \wedge D \to 0) \wedge (B \wedge C \to D) \wedge (A \wedge C \to B) \\ \wedge (C \to A) \wedge (1 \to C) \wedge (A \to D).$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \models \psi \to \varphi$.

(b) Gilt $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Phi' \models \varphi$ für alle Obermengen $\Phi' \supseteq \Phi$.

(c) $\Phi \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.

(d) Gilt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$, dann ist Φ unerfüllbar. Ist umgekehrt Φ unerfüllbar, dann gilt $\Phi \models \varphi$ für alle Formeln φ.

Aufgabe 4

Seien Φ und Ψ zwei Formelmengen. Zeigen Sie, dass $\Phi \cup \Psi$ genau dann unerfüllbar ist, wenn es eine Formel η gibt, so dass $\Phi \models \eta$ und $\Psi \models \neg\eta$.