Aufgabe 1

Sei $A \subseteq \{0,1\}^*$ eine unendliche Menge von Wörtern. Zeigen Sie, dass es eine unendliche Folge $w_0, w_1, w_2, \ldots$ gibt, so dass jedes w_i ein Anfangsstück von w_{i+1} und von mindestens einem Wort aus A ist.
(Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König.)

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen anhand der Resolutionsmethode.

(a) Folgende Formeln sind unerfüllbar:

$$\varphi_1 := (\neg X \vee U \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge X \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg U) \wedge Z\,;$$
$$\varphi_2 := (Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Z)\,.$$

(b) Folgende Formel ist allgemeingültig:

$$\varphi_3 := (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (\neg Z \vee Y) \rightarrow (\neg X \vee Z)$$

(c) Folgende Folgerungsbeziehung ist gültig:

$$\{(\neg X \vee \neg Z \vee V \vee Y),\ (X \vee Y),\ (\neg Y \vee \neg Z)\} \models (Z \vee \neg X) \wedge (\neg V \vee \neg Z)$$

Aufgabe 3

Ein ungerichteter Graph heißt *bipartit*, wenn seine Knotenmenge in zwei Mengen L und R zerfällt, so dass jede Kante einen Knoten von L mit einem Knoten von R verbindet.

Beweisen Sie durch Anwendung des Kompaktheitssatzes, dass ein (möglicherweise unendlicher) Graph G genau dann bipartit ist, wenn jeder endliche (knoteninduzierte) Teilgraph von G bipartit ist.