

Aufgabe 1

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Beweisen Sie ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(i) $(X \rightarrow Y), (X \rightarrow Z) \Rightarrow X, (Y \wedge Z)$

(ii) $(X \vee Y), (Z \rightarrow \neg Y) \Rightarrow (X \wedge \neg Z), (X \leftrightarrow Z)$

Aufgabe 2

Konstruieren Sie für die folgenden Sequenzen Beweise im Sequenzenkalkül oder falsifizierende Interpretationen:

(i) $(X \vee Y), (Z \vee \neg Y) \Rightarrow (X \vee Z)$

(ii) $(X \vee Y \vee Z), (Z \rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \rightarrow X), (\neg Z \wedge Y)$

Aufgabe 3

Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln nach, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i)
$$\frac{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

(ii)
$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

Aufgabe 4

Geben Sie die Schlussregeln $(\oplus \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \oplus)$ für den Junktor \oplus („exklusives oder“) an. Konstruieren Sie im entsprechend erweiterten Sequenzenkalkül einen Beweis für die Sequenz

$$(\psi \oplus \varphi) \oplus \vartheta \Rightarrow \psi \oplus (\varphi \oplus \vartheta).$$