Aufgabe 1

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Beweisen Sie ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(i) $(X \to Y),\ (X \to Z) \Rightarrow X,\ (Y \wedge Z)$

(ii) $(X \vee Y),\ (Z \to \neg Y) \Rightarrow (X \wedge \neg Z),\ (X \leftrightarrow Z)$

Aufgabe 2

Konstruieren Sie für die folgenden Sequenzen Beweise im Sequenzenkalkül oder falsifizierende Interpretationen:

(i) $(X \vee Y), (Z \vee \neg Y) \Rightarrow (X \vee Z)$

(ii) $(X \vee Y \vee Z), (Z \to Y) \Rightarrow (\neg Y \to X), (\neg Z \wedge Y)$

Aufgabe 3

Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln nach, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) $$\frac{\varGamma,\ \varphi \to \psi \Rightarrow \varDelta,\ \psi}{\varGamma \Rightarrow \varDelta,\ \varphi}$$

(ii) $$\frac{\varGamma,\ \varphi \Rightarrow \varDelta,\ \psi}{\varGamma \Rightarrow \varDelta,\ \varphi \to \psi}$$

Aufgabe 4

Geben Sie die Schlussregeln ($\oplus \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \oplus$) für den Junktor $\oplus$ („exklusives oder“) an. Konstruieren Sie im entsprechend erweiterten Sequenzenkalkül einen Beweis für die Sequenz

$$(\psi \oplus \varphi) \oplus \vartheta \Rightarrow \psi \oplus (\varphi \oplus \vartheta).$$