Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Strukturen:

- den (*geordneten*) *binären Baum*: $\mathfrak{T} := (\{0,1\}^*, s_0, s_1)$ mit den Nachfolgerfunktionen $s_0(w) := w0$ und $s_1(w) := w1$.
- den *ungeordneten binären Baum*: $\mathfrak{T}_\preceq := (\{0,1\}^*, \preceq)$ mit der Präfixordnung

$$x \preceq y \quad :\text{gdw} \quad \text{es gibt ein Wort } z \in \{0,1\}^* \text{ mit } y = xz.$$

(a) Welche der folgenden Mengen sind Universen einer Substruktur von $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{T}_\preceq$?

(i) $A := \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $B := \{0110w \mid w \in \{0,1\}^*\}$

(iii) $C := \{w \mid w \in \{0,1\}^*,\ |w| < n\}$

(iv) $D := \{u111w \mid u, w \in \{0,1\}^*\}$

(b) Das längste gemeinsame Präfix $x \sqcap y$ zweier Worte x und y ist das längste Wort $z \in \{0,1\}^*$ mit $z \preceq x$ und $z \preceq y$. Bestimmen Sie alle Substrukturen der Expansion $(T, s_0, s_1, \sqcap)$ von $\mathfrak{T}$ um die Funktion $\sqcap$.

Aufgabe 2

Vergleichen Sie die Mächtigkeit folgender Mengen:

(a) die Menge der Knoten des unendlichen binären Baums;

(b) die Menge aller Strukturen $(\{0,1\}, f)$ mit einer n-stelligen Funktion f;

(c) die Menge aller unendlichen Bitfolgen;

(d) die Menge aller Graphen mit Knotenmenge $\mathbb{N}$;

(e) $\mathbb{R}$;

(f) die Menge $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Hinweis. 1) $|A| \leq |B|$, falls injektive Funktion $f : A \to B$ existiert. 2) Sie können das Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem benutzen: Sind $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektive Funktionen, dann gibt es auch eine Bijektion $h : A \to B$.

Aufgabe 3

Eine lineare Ordnung $(A, \leq)$ heißt *diskret*, wenn

- zu jedem Element $a \in A$ entweder kein $b > a$ existiert oder es einen direkten Nachfolger gibt, d. h. ein Element $b > a$, so daß kein weiteres Element $b > c > a$ existiert, und
- zu jedem Element $a \in A$ entweder kein $b < a$ existiert oder es einen direkten Vorgänger gibt, d. h. ein Element $b < a$, so daß kein weiteres Element $b < c < a$ existiert.

(a) Geben Sie eine lineare Ordnung an, welche die erste, aber nicht die zweite Bedingung erfüllt.

(b) Geben Sie eine lineare Ordnung an, welche die zweite, aber nicht die erste Bedingung erfüllt.

(c) Geben Sie eine diskrete Ordnung der Menge $\mathbb{Q}$ an, oder beweisen Sie, daß eine solche nicht existiert.