Aufgabe 1

Seien $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, f^{\mathfrak{A}}, g^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{B}}, g^{\mathfrak{B}})$ Strukturen mit

$$f^{\mathfrak{A}}(w) := w0, \qquad g^{\mathfrak{A}}(w) := w1,$$
$$f^{\mathfrak{B}}(n) := 2n, \qquad g^{\mathfrak{B}}(n) := 3n.$$

Welche der folgenden Funktionen $h : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ sind Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$?

(a) $h(w) := 0$ für alle w.

(b) $h(w) := |w|$, wobei $|w|$ die Länge von w bezeichnet.

(c) $h(w) := 2^{\#_0(w)}3^{\#_1(w)}$, wobei $\#_0(w)$ und $\#_1(w)$ die Anzahl der Nullen bzw. Einsen in w bezeichnet.

(d) $h(w) := 2^{|w|}$.

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an.

(b) Geben Sie je einen starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an, oder beweisen Sie, dass es einen solchen nicht gibt.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass ein Graph $\mathcal{G}$ genau dann bipartit ist, wenn es einen Homomorphismus von $\mathcal{G}$ nach $\bullet - \bullet$ gibt.

(b) Charakterisieren Sie die Klasse der vollständigen bipartiten Graphen auf ähnliche Weise.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{K} := (S, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Geben Sie FO-Formeln an, welche ausdrücken, dass

(a) x einen b-Vorgänger hat, an dem Q gilt;

(b) es zwischen x und y einen a-Pfad der Länge höchstens 3 gibt;

(c) von allen Zuständen, an denen Q gilt, in maximal zwei b-Schritten ein Zustand erreicht werden kann, an dem P gilt.