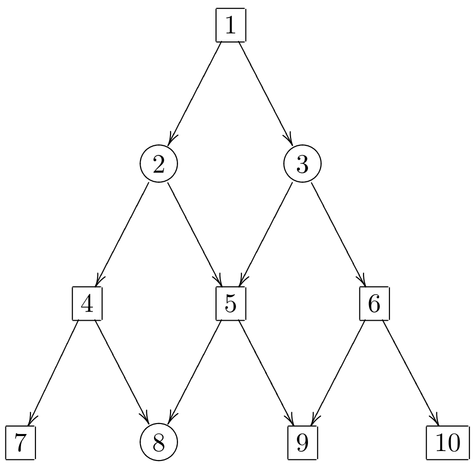
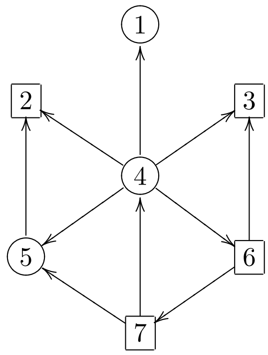
Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Spielgraphen (runde Knoten gehören Spieler 0).



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

(i) Berechnen Sie jeweils die Gewinnregionen W_0 und W_1 in den beiden Spielen und geben Sie die jeweiligen Gewinnstrategien an.

(ii) Sind die Spiele fundiert? Sind sie determiniert?

(iii) Gibt es für die beiden Spielgraphen jeweils eine Struktur $\mathfrak{A}$ und einen FO-Satz ψ, so dass der Spielgraph dem Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ entspricht?

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{Z}_3 := (\{0, 1, 2\}, +)$ die Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Konstruieren Sie das Auswertungsspiel zur Formel

$$\forall x \ \exists y \ (x = y + y \land (y = x + x \lor y = x + y)),$$

und geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, V_0, V_1, E, H)$ ein Spielgraph expandiert um eine einstellige Relation H (die Menge der heißen Positionen) mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Spieler immer abwechselnd ziehen, d.h. $E \subseteq (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$.

(a) Geben Sie FO-Formeln an, die ausdrücken, dass

  (i) Spieler 0 von Position x aus höchstens noch 2 Züge lang weiterspielen kann, unabhängig davon, wie ihr Gegner spielt.

  (ii) Spieler 0 von Position x aus eine Gewinnstrategie hat, welche in maximal n Zügen zum Sieg führt (für festes n).

(b) Formulieren Sie in FO den Sachverhalt, dass die Menge H eine Falle für Spieler 0 ist, d.h. sobald eine Position aus H erreicht wird, kann Spieler 1 erzwingen, dass die Partie diese Menge nicht mehr verlassen wird.

(c) Definieren Sie in FO die Menge der Positionen, von denen aus Spieler 1 eine Strategie hat, die Menge H in höchstens drei Zügen zu erreichen.