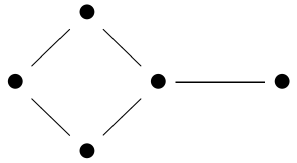
11. Gruppenübung, Mathematische Logik, WS 2006/07

Aufgabe 1

Geben Sie Axiomensysteme für folgende Theorien an:

(a) Die Theorie des Graphen



.

(b) Die Theorie der unendlichen partiellen Ordnungen.

(c) Die Theorie der ungerichteten Graphen ohne Knoten mit ungeradem Grad.

Aufgabe 2

Für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei $\mathfrak{A}_{m,n} := (A, P)$ eine Struktur mit Universum A und einstelligem Prädikat der Größe $|P| = m$ und $|A \setminus P| = n$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_{m_0,n_0} \equiv_k \mathfrak{A}_{m_1,n_1}$ genau dann gilt, wenn

$$(m_0 = m_1 \quad \text{oder} \quad m_0, m_1 \geq k) \qquad \text{und} \qquad (n_0 = n_1 \quad \text{oder} \quad n_0, n_1 \geq k).$$

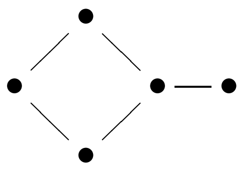
Aufgabe 3

Sei $\tau = \{P_1, \dots, P_k\}$ eine Signatur mit k einstelligen Relationen. Geben Sie eine Funktion $f(k, m)$ an, so dass jede erfüllbare Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ vom Quantorenrang m ein Modell der Größe höchstens $f(k, m)$ hat.

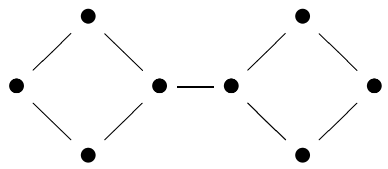
Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die folgenden Strukturen jeweils die kleinste Zahl m, so dass im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ der Herausforderer gewinnt, in $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aber die Duplikatorin. Geben Sie entsprechende Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin an.

(a) $\mathfrak{A} :=$



und $\mathfrak{B} :=$



(b) $\mathfrak{A} := \big(\mathcal{P}\{0,1\}, \subseteq\big)$ und $\mathfrak{B} := \big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\big)$.

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M)$, wobei M Graph der Multiplikation ist.