Aufgabe 1

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der transitiven ungerichteten Graphen, die nicht zusammenhängend sind.

(b) Die Klasse aller Graphen mit einem Hamiltonkreis.

(c) Die Klasse aller Graphen mit überabzählbarer Knotenmenge.

(d) Die Klasse aller Strukturen, die zu $(\mathbb{Q}, <)$ elementar äquivalent sind.

(e) Die Klasse aller Strukturen, die zu $(\mathbb{Q}, <)$ isomorph sind.

Aufgabe 2

Sei $\tau := \{R, f, g, c\}$ mit einem zweistelligen Relationsymbol R, einstelligen Funktionssymbolen f, g und einer Konstanten c. Ferner sei

$$T := \{gc = c,\ fgfc = gffc,\ ffc = fc,\ ggfc = gfc,\ Rcgc,\ Rfcgfc\}.$$

(a) Geben Sie die kleinste Menge Σ an, welche T enthält und abgeschlossen unter Substitution ist.

(b) Konstruieren Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)/\!\sim$ der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

Aufgabe 3

Das *Spektrum* spec(φ) einer FO-Formel φ ist die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, so dass ein Modell $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ der Kardinalität n existiert.

Beweisen Sie, dass jede FO-Formel, deren Spektrum unendlich ist, mindestens ein unendliches Modell hat.