

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 24.10. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

- (a) $\neg(X \rightarrow (Y \rightarrow X))$; (c) $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow Y$;
(b) $(\neg X \vee Y) \rightarrow (X \wedge \neg Y)$; (d) $(X \rightarrow Y) \vee (Y \rightarrow X)$.

Aufgabe 2

10 Punkte

Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln logisch äquivalent sind:

- (a) $X \rightarrow (Y \wedge Z)$ und $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z)$;
(b) $(X \wedge Y \wedge Z) \rightarrow Q$ und $X \rightarrow (Y \rightarrow (Z \rightarrow Q))$;
(c) $(X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X$ und $(X \wedge Y) \rightarrow \neg(Z \rightarrow X)$.

Aufgabe 3

10 Punkte

- (a) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für alle dazu passenden Interpretationen $\mathcal{J} : \{X_0, X_1, X_2\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt, dass sich durch Ändern jedes Wahrheitswertes $\mathcal{J}(X_i)$ auch der Wahrheitswert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{J}}$ ändert.
(b) Kann $\varphi(X_0, X_1, X_2)$ so gewählt werden, dass $\{h_\varphi\}$ funktional vollständig ist?
(c) Geben Sie für jedes n eine Formel $\varphi_n(X_0, \dots, X_{n-1})$ mit der Eigenschaft aus (a) an.

Aufgabe 4

10 Punkte

- (a) Formalisieren Sie folgenden Auszug aus der Spezifikation einer Steuerung für zwei Ampeln, die an der Kreuzung zweier Einbahnstraßen stehen, in der Aussagenlogik.
- Beide Ampeln haben jeweils ein grünes, ein gelbes und ein rotes Licht. Zu jedem Zeitpunkt leuchtet genau ein Licht.
 - Es kommt nicht vor, dass an den Ampeln gleichzeitig die beiden grünen Lichter leuchten.
 - Wenn an einer Ampel das rote Licht leuchtet, dann leuchtet an der jeweils anderen Ampel entweder das grüne oder das gelbe Licht.
- (b) Geben Sie (i) ein Modell Ihrer Spezifikation an und (ii) eine Interpretation, die die Spezifikation nicht erfüllt.
- (c) Wäre die Spezifikation für praktische Anwendungen ausreichend?