Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 7.11. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Formel unerfüllbar ist, indem Sie explizit $\mathrm{Res}^*(\varphi)$ berechnen.

$$\varphi := (X \lor \neg Y) \land (\neg X \lor Z) \land (\neg Y \lor \neg Z)$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Beziehung gilt:

$$\{(X \lor \neg Y \lor \neg V),\ (X \lor Y \lor Z),\ (X \lor V),\ (\neg X \lor \neg V)\} \models (X \to \neg V) \land (V \to Z)$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(X \land Z) \lor U \lor (X \land \neg Z \land \neg U) \lor (\neg Y \land \neg U) \lor (\neg X \land Y).$$

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Wir definieren die *Doppelresolution* analog zum Resolutionsverfahren aus der Vorlesung, jedoch mit einem neuen Resolventenbegriff: Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C heißt *Doppelresolvente* von C_1 und C_2 genau dann, wenn es Literale Y, Z gibt, so dass $\{Y, Z\} \subseteq C_1$, $\{\overline{Y}, \overline{Z}\} \subseteq C_2$ und $C = (C_1 \setminus \{Y, Z\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{Y}, \overline{Z}\})$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Doppelresolutionskalkül ist korrekt.

(b) Der Doppelresolutionskalkül ist vollständig.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Erinnerung: Bei der *Einheitsresolution* beschränkt man sich auf Ableitungen, bei denen in jedem Resolutionsschritt eine der Klauseln genau ein Literal enthält.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Einheitsresolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \to W) \land (Z \land U \to Y) \land (Z \land V \to W) \land (Y \land Z \land U \to V) \land \neg(U \to X)$$
$$\land (Y \land Z \land W \to X) \land (U \to Z)$$

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass die Einheitsresolution im allgemeinen, d. h. für nicht Horn-Formeln, nicht vollständig ist.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Menge von Formeln und φ eine Formel, welche zu Φ äquivalent ist, d. h. für jede zu $\Phi \cup \{\varphi\}$ passende Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt

$$\mathfrak{I} \models \Phi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{I} \models \varphi.$$

Zeigen Sie, dass es dann eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, die zu Φ äquivalent ist.

Aufgabe 5* 10* Punkte

Für ein Alphabet Σ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Wörter über Σ durch Σ^*. Sei nun $\Sigma = \{0, 1\}$ und $A \subseteq \Sigma^*$ eine **unendliche** Menge von (endlichen) Σ-Wörtern. Zeigen Sie, dass es ein unendliches Wort $\alpha = a_0 a_1 \dots$ gibt, so dass jedes endliche Anfangsstück von α zu einem Wort aus A verlängert werden kann. Gilt diese Aussage auch, wenn Σ eine beliebige endliche Menge ist? Gilt die Behauptung auch für $\Sigma = \mathbb{N}$?

Die mit * versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben, für deren Lösung es Zusatzpunkte gibt.