Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 14.12. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(a) $(X \to Y), (Z \to Y) \;\Rightarrow\; (X \lor Z), \neg Y$;

(b) $(X \lor Y),\; Y \to (Z \lor X) \;\Rightarrow\; X,\; Z$.

Überprüfen Sie durch geeignete Anwendung der Reolutionsmethode, ob folgende Sequenz gültig ist:

(c) $(X \to Z),\; (Y \to Z) \;\Rightarrow\; (X \lor Y) \to Z$.

Aufgabe 2

10 Punkte

Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für folgende Sequenzen:

(a) $(X \to \neg Z),\; (Y \to \neg Z) \;\Rightarrow\; Z \to (X \leftrightarrow Y)$;

(b) $X \lor Y,\; Y \to (Z \lor X) \;\Rightarrow\; X$;

(c) $\emptyset \;\Rightarrow\; \big(\psi \to (\varphi \to \vartheta)\big) \to \big((\psi \land \varphi) \to \vartheta\big)$.

Aufgabe 3

10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(a) $\dfrac{\Gamma,\; \varphi \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta,\; \neg\varphi}$;

(b) $\dfrac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta,\; \varphi \qquad \Gamma,\; \psi \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma,\; \varphi \to \psi \;\Rightarrow\; \Delta}$;

(c) $\dfrac{\Gamma,\; \varphi \;\Rightarrow\; \Delta \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta,\; \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \to \varphi}$.

Aufgabe 4

10 Punkte

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ist *endlich axiomatisierbar*, wenn eine endliche Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{AL}$ existiert, welche die gleichen Modelle hat wie Φ.

Sei $\Phi := \{\varphi_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Formelmenge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$ aber $\varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$. Zeigen Sie, dass Φ nicht endlich axiomatisierbar ist.