Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 21.11. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar, welche überabzählbar?

(a) Die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(b) Die Potenzmenge einer (beliebigen) *endlichen* Teilmenge von $\mathbb{N}$.

(c) Die Menge aller aussagenlogischen Formeln mit Aussagenvariablen $\{X_i \,:\, i \in \mathbb{N}\}$.

(d) Die Menge aller Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, R^{\mathfrak{A}})$ mit einer einstelligen Relation $R^{\mathfrak{A}}$.

(e) Die Menge aller unendlichen Bitfolgen.

Aufgabe 2 10 Punkte

Die Kardinalität einer Menge A ist nicht größer als die einer Menge B ($|A| \leq |B|$), wenn eine injektive Funktion $f : A \to B$ existiert. Ordnen Sie folgende Mengen bezüglich ihrer Kardinalität, und geben Sie dabei insbesondere an, welche Mengen gleichmächtig sind, bzw. welche Mengen eine echt größere Kardinalität haben als andere.

(a) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, die Potenzmenge der reellen Zahlen.

(b) Die Menge aller Graphen mit Knotenmenge $\mathbb{N}$.

(c) Die Menge aller offenen Intervalle $(n, m) = \{x \in \mathbb{R} \mid n < x < m\}$, mit $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.

(d) Die Menge aller Strukturen $(\mathbb{N}, f)$ mit einer einstelligen Funktion f.

(e) Die Menge aller Strukturen $(\mathbb{N}, f)$ mit einer einstelligen Funktion f, deren Bildbereich endlich ist.

Hinweis: Sie können für die Vergleiche auch das folgende Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem benutzen: Sind $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektive Funktionen, dann gibt es auch eine Bijektion $h : A \to B$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Dann ist $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (wir schreiben $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(1) $A \subseteq B$,

(2) für alle $n \in \mathbb{N}$ und $R \in R^n(\tau)$ gilt $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ und

(3) für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in F^n(\tau)$ gilt $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}}\,|_A$, d. h. $f^{\mathfrak{A}}$ ist die *Restriktion* von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A.

Sei weiterhin $\mathfrak{B}$ eine Struktur und $M \subseteq B$ eine Teilmenge des Universums. Die von M *erzeugte* Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist die kleinste Struktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $M \subseteq A$.

Betrachten Sie nun die Boolsche Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{BA}(\mathbb{N}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^-, \emptyset, \mathbb{N}).$$

(a) Welche Substrukturen werden von folgenden Teilmengen erzeugt?

(i) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(ii) Die Menge aller unendlichen Intervalle $(n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}$.

(iii) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement ebenfalls unendlich ist.

(b) Kann eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die ganze Struktur $\mathrm{BA}(\mathbb{N})$ erzeugen?