Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 28.11. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Untersuchen Sie für die unten angegebenen Tripel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, ob f (i) ein Homomorphismus, (ii) eine Einbettung und/oder (iii) ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

(a) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \leq)$, $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $f(n) := 2^n$.

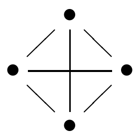
(b) $\mathfrak{A} := (P, \cup, \cap)$, wobei P die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist, $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \max, \min)$ und $f(X) := |X|$.

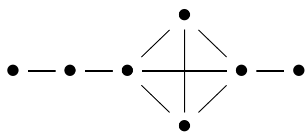
(c) $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \cdot)$, wobei $u \cdot v := uv$ die Verkettung von Wörtern ist, $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +)$ und $f(u) := |u|$ die Funktion, die ein Wort u auf seine Länge abbildet.

Aufgabe 2 10 Punkte

Ein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt *Automorphismus* von $\mathfrak{A}$. Bezüglich Hintereinanderausführung bildet die Menge aller Automorphismen einer Struktur $\mathfrak{A}$ die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ mit neutralem Element $1_{\mathfrak{A}}$, der Identitätsabbildung auf $\mathfrak{A}$.

(a) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen folgender Graphen.

(i) 

(ii) 

(b) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen folgender Strukturen.

(i) $(\mathbb{N}, <)$ (ii) $(\mathbb{Z}, <)$

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\mathrm{AL}(X, Y), \models)$ die Struktur aller aussagenlogischen Formeln über den Variablen X und Y mit der (zweistelligen) Folgerungsrelation und $\mathfrak{B} := (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \leq)$. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) ein surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(b) ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(c) eine Einbettung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$;

(d) ein nichttrivialer Automorphismus von $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 4 10 Punkte

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar*, wenn es eine Funktion $f : V \to \{1, \dots, k\}$ gibt, so daß $f(u) \neq f(v)$ für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt. Ein Graph ist *vollständig*, wenn alle Knoten miteinander durch eine Kante verbunden sind.

(a) Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann k-färbbar ist, wenn es einen Homomorphismus von G in den vollständigen Graphen mit k Knoten gibt.

(b) Zeigen Sie, dass ein (unendlicher) Graph G genau dann k-färbbar ist, wenn jeder endliche (knoteninduzierte) Untergraph von G k-färbbar ist.

Hinweis: Formalisieren Sie das Problem in Aussagenlogik, indem Sie für jeden Knoten $v \in V$ und jede Farbe $c \in \{1, \dots, k\}$ eine Aussagenvariable X_{vc} einführen, die besagt, dass der Knoten v mit der Farbe c gefärbt ist, und wenden Sie den Kompaktheitssatz an.