Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 5.12. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Wir betrachten eine Expansion $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, R)$ der natürlichen Arithmetik mit einem einstelligen Relationssymbol R. Drücken Sie folgende Sachverhalte in der Prädikatenlogik aus:

(a) x und y sind teilerfremd;

(b) x und y haben die gleichen Primfaktoren;

(c) x ist eine Primpotenz;

(d) die 5-te Ziffer der Binärdarstellung von x ist eine 0;

(e) $R^{\mathfrak{N}}$ ist unendlich.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Seien R und S zweistellige Relationssymbole, f ein einstelliges und g ein zweistelliges Funktionssymbol. Berechnen Sie

$$\big(\forall z(Rxgzy \rightarrow \exists xSzx) \land \exists x(Ryx \land Rxz) \land \forall y \exists x(gxz = y)\big)[x/gxfz, y/gzx, z/fx]$$

(b) Zeigen Sie:

(i) $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \varphi[x_1/t_1] \cdots [x_n/t_n]$, falls für alle $i \neq j$ x_i nicht in t_j vorkommt.

(ii) $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \varphi[x_n/y][x_1/t_1, \ldots, x_{n-1}/t_{n-1}][y/t_n]$, falls y nicht in φ und den Termen $t_1, \ldots, t_n$ vorkommt.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ aus φ mittels einer Komposition einfacher Substitutionen gewonnen werden kann.

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir betrachten eine endliche Signatur τ.

(a) Sei $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ eine Menge von FO(τ)-Sätzen und

$$\Phi' := \{\varphi_0\} \cup \{\, (\varphi_0 \land \cdots \land \varphi_{n-1}) \rightarrow \varphi_n \ : \ n > 0\,\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi')$.

(b) Eine Menge Φ von FO(τ)-Sätzen heißt *glatt*, wenn keine Struktur mehr als einen Satz aus Φ verletzt, d.h. wenn für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt $|\{\varphi \in \Phi \ : \ \mathfrak{A} \not\models \varphi\}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass jede FO-axiomatisierbare Klasse auch ein glattes Axiomensystem hat.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei τ eine beliebige Signatur. Zu jeder τ-Struktur $\mathfrak{A}$ konstruieren wir eine rein relationale Struktur $\widehat{\mathfrak{A}}$, indem wir jede n-stellige Funktion f von $\mathfrak{A}$ durch ihren Graphen ersetzen,

$$G_f := \{(\bar{a}, b) \in A^{n+1} : f(\bar{a}) = b\}.$$

(a) Geben Sie ein Verfahren an, um eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ in eine relationale Formel $\widehat{\varphi}$ zu transformieren, so dass für jede Belegung β gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \quad \text{gdw} \quad (\widehat{\mathfrak{A}}, \beta) \models \widehat{\varphi}$$

(b) Schreiben Sie das in der Vorlesung vorgestellte Axiomensystem für Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$ in relationaler Form.