

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 12.12. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Seien R und S zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionsymbol. Formen Sie folgende Formeln in Pränex- und Skolem-Normalform um:

- (a) $\varphi := \exists x(\exists y(Rxy \wedge f y w = x) \wedge \exists z S z x) \vee \forall x((\forall y R x f y w) \rightarrow \exists z S z x)$;
 (b) $\psi := \forall x \forall y((\forall z(x \neq f y z \vee \exists u R z u)) \rightarrow (S x z \wedge \exists x R x y))$.

Aufgabe 2

10 Punkte

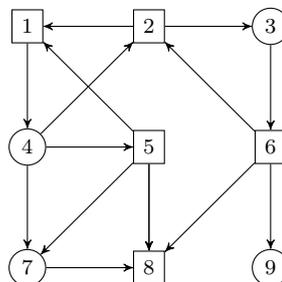
Sei $\mathfrak{A} := (\{0, 1, 2\}, \circ)$ eine Struktur mit einer zweistelligen Funktion $x \circ y := x \cdot y \bmod 3$. Wir betrachten die Formel $\psi := \forall x \exists y(y \circ y = x \vee y \circ y \circ y = x)$.

- (a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf \mathfrak{A} und ψ an.
 (b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

Aufgabe 3

10 Punkte

- (a) Betrachten Sie folgenden Spielgraphen, in dem $\circledast i$ eine Position von Spieler 0 und \boxed{j} eine Position von Spieler 1 bezeichnet.



Bestimmen Sie für jeden Knoten, ob ein Spieler von dort aus eine Gewinnstrategie besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

- (b) Geben Sie einen Spielgraphen an, in dem es Positionen gibt, von denen aus keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 4

10 Punkte

Sei $G = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph. Geben Sie FO-Formeln an, die ausdrücken, dass Spieler 0 von Position x aus

- (a) nach höchstens zwei Schritten verloren hat, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt;
 (b) eine Gewinnstrategie hat, welche in höchstens n Schritten zum Sieg führt (für festes n);
 (c) erzwingen kann, in höchstens n Schritten (für festes n) nach y zu gelangen.