Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 12.12. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Seien R und S zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionsymbol. Formen Sie folgende Formeln in Pränex- und Skolem-Normalform um:

(a) $\varphi := \exists x\big(\exists y(Rxy \land fyw = x) \land \exists z Szx\big) \lor \forall x\big((\forall y Rxfyw) \to \exists z Sxz\big)$;

(b) $\psi := \forall x \forall y\big((\forall z(x \neq fyz \lor \exists u Rzu)) \to (Sxz \land \exists x Rxy)\big)$.

Aufgabe 2 10 Punkte

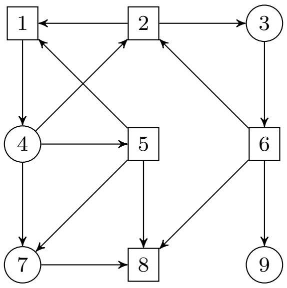
Sei $\mathfrak{A} := (\{0,1,2\}, \circ)$ eine Struktur mit einer zweistelligen Funktion $x \circ y := x \cdot y \bmod 3$. Wir betrachten die Formel $\psi := \forall x \exists y(y \circ y = x \lor y \circ y \circ y = x)$.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Betrachten Sie folgenden Spielgraphen, in dem ⓘ eine Position von Spieler 0 und $\boxed{j}$ eine Position von Spieler 1 bezeichnet.



Bestimmen Sie für jeden Knoten, ob ein Spieler von dort aus eine Gewinnstrategie besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

(b) Geben Sie einen Spielgraphen an, in dem es Positionen gibt, von denen aus keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $G = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph. Geben Sie FO-Formeln an, die ausdrücken, dass Spieler 0 von Position x aus

(a) nach höchstens zwei Schritten verloren hat, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt;

(b) eine Gewinnstrategie hat, welche in höchstens n Schritten zum Sieg führt (für festes n);

(c) erzwingen kann, in höchstens n Schritten (für festes n) nach y zu gelangen.