Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 19.12. um 10:00 Uhr **am Lehrstuhl** und **nicht in der Vorlesung!**

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Werten Sie folgende ML Formeln auf der gegebenen Struktur aus.

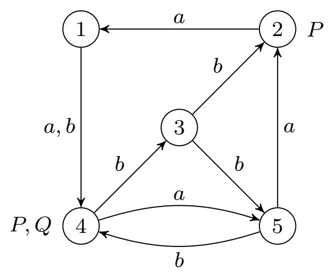
(a) $\varphi_a = \langle a\rangle\langle b\rangle Q$;

(b) $\varphi_b = \langle b\rangle[a]0$;

(c) $\varphi_c = \langle a\rangle 1 \wedge [b]P$;

(d) $\varphi_d = [b](\langle a\rangle P \wedge [b][a]P)$;

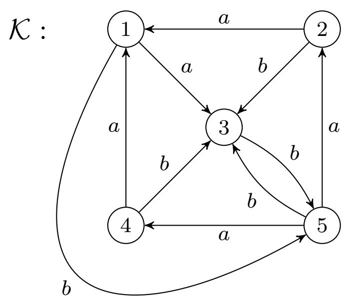
(e) $\varphi_e = [a](P \vee [a]P)$.

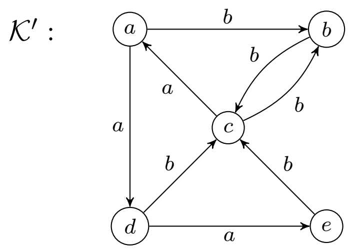


Aufgabe 2

10 Punkte

Wir betrachten folgende Transitionssysteme:





(a) Bestimmen Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$. Ermitteln Sie dazu alle Knotenpaare (u, v) aus $V_{\mathcal{K}} \times V_{\mathcal{K}'}$, so dass $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', v$ gilt. Geben Sie weiterhin für alle Paare, wo dies nicht der Fall ist, die größte Zahl m an, so dass $\mathcal{K}, u \sim_m \mathcal{K}', v$ gilt, und konstruieren Sie eine Modalformel φ der Modaltiefe $m+1$ mit $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

(b) Geben Sie ein Transitionssystem $\mathcal{K}''$ mit minimaler Anzahl von Zuständen an, so dass $\mathcal{K}'', v \sim \mathcal{K}, 1$ für einen geeigneten Zustand v gilt.

Aufgabe 3 10 Punkte

Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel der Modallogik an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) $\varphi_a(x) := \exists y \forall z \big(Exy \land (Qz \lor \neg Eyz)\big)$

(b) $\varphi_b(x) := \exists y \forall z (Exz \to Ezy)$

(c) $\varphi_c(x) := \forall y (Exy \to Qy \land \exists z (Ezy \land Pz))$

(d) $\varphi_d(x) := Px \land \exists y Eyy$

(e) $\varphi_e(x) := \exists y \big(Exy \land (\forall z (Eyz \to \exists u (Euz \land Pu))) \land Py\big)$

Aufgabe 4 10 Punkte

Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ Kripkestrukturen ohne atomare Eigenschaften, (also ohne Knotenbeschriftungen), in denen von jedem Knoten mindestens eine Kante ausgeht. $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ heißen *spuräquivalent*, wenn es für jedes unendliche Wort α über dem Alphabet der Kantenbeschriftung genau dann einen mit α beschrifteten Pfad von v aus in $\mathcal{K}$ gibt, wenn es einen solchen auch von v' aus in $\mathcal{K}'$ gibt. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Falls $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann sind $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ auch spuräquivalent.

(b) Sind $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ spuräquivalent, dann gilt auch $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$.