Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

10. Übung Mathematische Logik

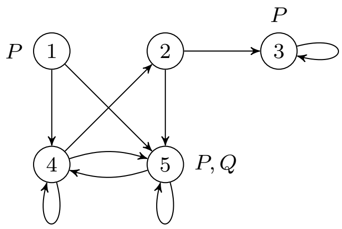
Abgabe: bis Mittwoch, den 9.1. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Alle Punkte dieser Übung zählen als **Zusatzpunkte**. Um den Vorlesungsstoff nachzuarbeiten, sollten Sie jedoch mindestens die ersten beiden Aufgaben lösen!

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ die folgende Kripkestruktur:



(a) Geben Sie für jede der folgenden Knotenmengen M eine ML-Formel ψ mit $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}} = M$ an.
  (i) $\{1\}$,
  (ii) $\{2, 5\}$,
  (iii) $\{3, 5\}$.

(b) In welchen Knoten von $\mathcal{K}$ gelten folgende CTL-Formeln?
  (i) $\mathsf{EF}\,(\mathsf{AG}\,P)$,
  (ii) $\mathsf{A}(P \;\mathsf{U}\; \mathsf{EG}\,(P \rightarrow Q))$,
  (iii) $\mathsf{E}(P \;\mathsf{U}\; \mathsf{E}((\neg P) \;\mathsf{U}\; \mathsf{AG}\,P))$.

Aufgabe 2 10 Punkte

Eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}$ ist *abwicklungsinvariant*, wenn für alle Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und alle Zustände v für die Abwicklung $\mathcal{T}_{\mathcal{K},v}$ gilt: $\mathcal{T}_{\mathcal{K},v}, v \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}, v \models \varphi$.

(a) Welche der folgenden Formeln sind invariant unter Abwicklungen?
  (i) $\varphi_1(x) := \forall y(Exy \lor Py)$
  (ii) $\varphi_2(x) := \exists a \exists b \exists c(Exa \land Exb \land Eac \land Ebc)$
  (iii) $\varphi_3(x) := \exists y \exists z(Exy \land Eyz \land y \neq z \land Pz)$
  (iv) $\varphi_4(x) := \exists y \exists z(Exy \land Exz \land y \neq z \land (Py \leftrightarrow Pz))$

(b) Geben Sie eine FO-Formel an, welche abwicklungs- aber nicht bisimulationsinvariant ist.

Aufgabe 3 20 Punkte

Beschreiben Sie das Auswertungsspiel für die Modallogik. Zeigen Sie, dass man jeder endlichen Kripkestruktur $\mathcal{K}$, jedem Zustand v in $\mathcal{K}$ und jeder Formel $\psi \in \mathrm{ML}$ in Negationsnormalform, ein Spiel $\mathrm{MC}(\mathcal{K}, v, \psi)$ der Größe $||\mathcal{K}|| \cdot |\psi|$ zuordnen kann, welches genau dann von einer bestimmten Anfangsposition aus eine Gewinnstrategie für die Verifiziererin erlaubt, wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$.

Aufgabe 4 20 Punkte

Beweisen Sie, dass CTL bisimulationsinvariant ist, und folgern Sie daraus, dass CTL die Baummodelleigenschaft hat.

Aufgabe 5 10 Punkte

Geben Sie eine CTL-Formel φ an, so dass $\mathcal{G}, v \models \varphi$ für jeden gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ und für alle $v \in V$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{G}$ 2-färbbar ist, oder zeigen Sie, dass eine solche Formel nicht existiert.