Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 16.1. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Wir betrachten folgende Äquivalenzstrukturen:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A}_1 := (\mathbb{N}, \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_1} := \{(n,m) \;:\; n = m\} \\
\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{Z}, \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_2} := \{(x,y) \;:\; 3|(x-y)\} = \{(x,y) \;:\; x \equiv y \pmod 3\} \\
\mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_3} := \{(A,B) \;:\; |A| = |B|\} \\
\mathfrak{A}_4 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, \sim) & \text{mit} & \sim^{\mathfrak{A}_4} := \{(A,B) \;:\; \max\{a \in A\} = \max\{b \in B\}\}
\end{array}$$

wobei $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ bezeichnet. Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \text{FO}$ an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen in den jeweiligen Strukturen nicht FO-definierbar sind:

  (i) alle nicht-trivialen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{Q}$ (d.h. $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{Q}$) in $(\mathbb{Q}, <)$;

  (ii) die Menge $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$.

(b) Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot)$. Geben Sie jeweils eine FO-Formel φ_i an oder zeigen Sie, dass es keine FO-Formel mit folgender Eigenschaft geben kann:

  (i) $\mathfrak{R} \models \varphi_1(\frac{1}{2}) \wedge \neg\varphi_1(2)$

  (ii) $\mathfrak{R} \models \varphi_2(\frac{1}{2}) \wedge \neg\varphi_2(-2)$

  (iii) $\mathfrak{R} \models \varphi_3(-2) \wedge \neg\varphi_3(-4)$

Aufgabe 3 10 Punkte

Welche der folgenden Theorien sind vollständig?

(a) Die Theorie der unendlichen partiellen Ordnungen;

(b) die Theorie der unendlichen linearen Ordnungen;

(c) die Theorie der partiellen Ordnungen mit genau 17 Elementen;

(d) die Theorie der linearen Ordnungen mit genau 17 Elementen.