**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

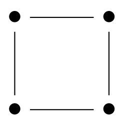
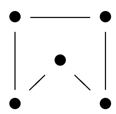
# 12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 23.1. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

## Aufgabe 1 — 10 Punkte

Betrachten Sie folgende Strukturen. Was ist die kleinste Zahl $m$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$? Geben Sie eine Formel vom Quantorenrang $m$ an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(a) $\mathfrak{A} :=$  und $\mathfrak{B} :=$ 

(b) $\mathfrak{A} := \big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\big)$ und $\mathfrak{B} := \big(\mathcal{P}\{0,1\}, \subseteq\big)$ (Potenzmengen von $\mathbb{N}$ und $\{0,1\}$)

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M, 1)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M, 1)$, wobei $M$ der Graph der Multiplikation ist.

## Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller gerichteten Graphen $(V, E, R, B)$, deren Knoten mit den Farben Rot und Blau gefärbt sind. $R$ sei dabei die Menge der roten und $B$ die der blauen Knoten. Jeder Knoten besitzt genau eine Farbe.

   (i) Axiomatisieren Sie die Klasse $\mathcal{K}$.

   (ii) Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass die Klasse aller Graphen aus $\mathcal{K}$, in denen jeder blaue Knoten keinen und jeder rote Knoten unendlich viele Nachfolger hat, FO-axiomatisierbar aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

## Aufgabe 3 — 10 Punkte

Welche der folgenden Formelmengen besitzt die Endliche-Modell-Eigenschaft? Begründen Sie knapp, warum Ihrer Meinung nach endliche Modelle existieren, oder geben Sie gegebenenfalls ein Unendlichkeitsaxiom an.

(a) Alle universellen Formeln, d. h. Formeln der Form $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \varphi$ mit quantorenfreiem $\varphi$.

(b) Die Theorie der dichten linearen Ordnungen, d. h. alle Formeln, die in jeder dichten linearen Ordnung gelten.

(c) Die Theorie der diskreten linearen Ordnungen.