**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

# 13. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 30.1. um 10:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

## Aufgabe 1

10 Punkte

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei $\Phi$ eine Menge von FO-Formeln über einer relationalen Signatur $\tau$, $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$ die durch $\Phi$ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine $\tau$-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht FO-axiomatisierbar ist.

## Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Ist die folgende Schlussregel korrekt?

$$\frac{\Gamma,\ \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \psi(c) \Rightarrow \Delta,\ \varphi(c)}$$

(b) Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier $b$ rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann.

*Hinweis*: Konstruieren Sie eine Ableitung einer geeigneten Sequenz $\Gamma \Rightarrow \emptyset$, wobei $\Gamma$ die obige Aussage formalisiert.

## Aufgabe 3

10 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_a$ : die Klasse der zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorphen Strukturen;

(b) $\mathcal{K}_b := \{(A, \circ)\ :\ (A, \circ) \text{ ist eine unendliche Gruppe}\}$;

(c) $\mathcal{K}_c := \{(A, f)\ :\ \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } f^n(a) = a\}$.