Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 2007/08

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

15 Punkte

Hinweis: Beantworten Sie die Fragen durch deutliches Ankreuzen der Kästchen. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt; für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit null Punkten gewertet. Falls die Gesamtpunktzahl negativ ist, wird die Aufgabe mit null Punkten bewertet.

(a) Sei φ eine erfüllbare ML-Formel. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein
φ hat ein endliches Modell.	☐	☐
φ hat ein unendliches Modell.	☐	☐
φ hat ein Baummodell.	☐	☐
φ ist äquivalent zu einer FO-Formel.	☐	☐

(b) Gegeben seien zwei relationale Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.
Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein
Die Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.	☐	☐
Der Herausforderer hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.	☐	☐
Die Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie für alle Spiele $\mathcal{G}_\ell(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ mit $\ell < m$.	☐	☐
Die Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.	☐	☐

(c) Welche der folgenden Sätze gelten in $(\mathbb{N}, +, <)$?

	ja	nein
$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x + z = y \wedge \neg y + z = x))$.	☐	☐
$\exists x (x + x + x = x \wedge \forall y (x + y = y))$.	☐	☐
$\forall x \exists y \big((y < x \vee y = x) \wedge \exists z (z + z = z \wedge x + y \neq z)\big)$.	☐	☐

(d) Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar?

	ja	nein
Das Erfüllbarkeitsproblem der Modallogik.	☐	☐
Das Auswertungsproblem für FO-Formeln auf endlichen Strukturen.	☐	☐
Ob eine modallogische Formel φ ein Baummodell hat.	☐	☐
Ob für eine Formel $\psi \in \mathrm{FO}$ die Sequenz $\emptyset \Rightarrow \psi$ gültig ist.	☐	☐

Aufgabe 2 15 Punkte

(a) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung auf die folgende Formel an. Geben Sie dabei für jeden Schritt die Menge der markierten Variablen an.

$$(1 \to X) \wedge (X \wedge Y \to Z) \wedge (U \to 0) \wedge (Z \wedge Y \to U) \wedge (V \to Y) \wedge (1 \to V)$$

(b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent?

(i) $(X \to Z) \vee (Y \to Z)$;

(ii) $(X \to Y) \vee (X \to Z)$;

(iii) $\neg(Z \to X) \vee \neg(Z \to Y)$;

(iv) $\neg(X \vee Y \vee Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$.

Aufgabe 3 20 Punkte

Seien P und E zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol. Sei ferner $\varphi := \exists y(((\forall z\ Pzx) \to Pxy) \wedge \forall x(\neg Exz \vee Exy))$.

(a) Bilden Sie $\varphi[x/fxy, y/gz, z/fxx]$.

(b) Geben Sie eine zu $\psi := \exists y \forall x \neg Fxy \wedge \forall x \exists y Fxy \wedge \forall x \forall y (Fxy \to \neg \exists z (Fxz \wedge \neg z = y))$ äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie ψ' zu einer Formel in Skolem-Normalform.

(d) Geben Sie je ein Modell für ψ' und die Skolem-Normalform von ψ' an.

Aufgabe 4 15 Punkte

Wir betrachten folgende Ordnungen:

$$\mathfrak{A}_1 := (\{1,2,3\}, <); \qquad \mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq);$$
$$\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <); \qquad \mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <).$$

(a) Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \mathrm{FO}$ an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d. h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

(b) Geben Sie jeweils eine Einbettung von $\mathfrak{A}_4$ nach $\mathfrak{A}_2$ und von $\mathfrak{A}_2$ nach $\mathfrak{A}_4$ an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert.

Aufgabe 5 20 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der unendlichen Graphen.

(b) Die Klasse der endlichen Graphen.

(c) Die Klasse der zu $(\mathbb{N}, +)$ isomorphen Strukturen.

(d) Die Klasse der partiellen Ordnungen mit kleinstem Element.

Aufgabe 6 15 Punkte

Seien Γ und Δ zwei Mengen von FO-Formeln. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta)$ genau dann gilt, wenn für jede nicht-leere endliche Teilmenge $\Delta_0 \subseteq \Delta$ eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert, so dass die Sequenz $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ gültig ist.