Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind:

(i) $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \vee Y)$,

(ii) $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Y$,

(iii) $(X \wedge \neg Y) \rightarrow \neg(X \wedge Y)$,

(iv) $(\neg X \wedge (X \vee Y)) \leftrightarrow (X \vee \neg Y)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X).$$

Aufgabe 3

Jedem gerichteten Graphen mit Knoten $1, \ldots, n$ ordnen wir eine aussagenlogische Interpretation in folgender Weise zu: Jedem Paar (i, k) von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(i) Zeichnen Sie einen beliebigen Graphen mit 5 Knoten und beschreiben Sie diesen durch eine aussagenlogische Formel.

(ii) Schreiben Sie Formeln φ_n, die ausdrücken, dass der Graph ein Pfad ist – zunächst für $n = 5$ und dann für beliebige n.

(iii) Geben Sie für beliebige n eine Formel an, die aussagt, dass der Graph keinen Zyklus enthält.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Mengen sind funktional vollständig?

(i) $\{1, \rightarrow\}$;

(ii) $\{\mathrm{sel}, 0, 1\}$, wobei $\mathrm{sel}(u, v, w) = \begin{cases} v & \text{falls } u = 0; \\ w & \text{falls } u = 1. \end{cases}$