Aufgabe 1

Sei $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\Phi \cup \Psi \models \varphi \wedge \psi$;

(b) $\Phi \cap \Psi \models \varphi \vee \psi$;

(c) $\Phi \models \varphi \rightarrow \psi$;

(d) $\Psi \models \varphi \rightarrow \psi$.

Aufgabe 2

Zu zwei aussagenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ über dem gleichen Definitionsbereich σ definieren wir eine neue aussagenlogische Interpretation $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 : \sigma \rightarrow \{0,1\}$ durch

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{I}_1(X) = \mathfrak{I}_2(X) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jede Horn-Formel φ der Schnitt zweier Modelle wieder ein Modell ist, d.h. wenn $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent?

   (i) $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Z)$;

   (ii) $X \rightarrow (Y \vee Z)$;

   (iii) $X \vee Z \vee (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$.

Aufgabe 3

Wenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung auf die folgende Formel an:

$$(1 \rightarrow X) \wedge (X \wedge Y \rightarrow Z) \wedge (U \rightarrow 0) \wedge (Z \wedge Y \rightarrow U) \wedge (V \rightarrow Y) \wedge (1 \rightarrow V)$$

Aufgabe 4

Seien Φ und Ψ zwei Formelmengen. Zeigen Sie, dass $\Phi \cup \Psi$ genau dann unerfüllbar ist, wenn es eine Formel η gibt, so dass $\Phi \models \eta$ und $\Psi \models \neg\eta$.