Aufgabe 1

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(a) $(X \vee Y),\ (Z \to \neg Y) \Rightarrow \neg X \to \neg Z$;
(b) $X \to (Y \vee Z),\ \neg(Y \wedge Z) \Rightarrow X,\ \neg Z$.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie für die folgenden Sequenzen Beweise im Sequenzenkalkül oder falsifizierende Interpretationen:

(a) $X \to Y \Rightarrow ((Z \to Y) \to (X \vee Z)) \to Y$;
(b) $(X \vee Y),\ Y \to (Z \vee X) \Rightarrow X,\ Y \wedge Z$.

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(a) $$\frac{\Gamma, \varphi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}$$

(b) $$\frac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \psi}$$

Aufgabe 4

Zwei Formeln heißen *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn entweder beide erfüllbar oder beide unerfüllbar sind. (Erfüllbarkeitsäquivalente Formeln wie etwa X und $\neg X$ müssen natürlich nicht unbedingt äquivalent sein.)

Zeigen Sie, dass es zu jeder Formel in KNF eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF gibt, die nur polynomiell größer ist.