Aufgabe 1

Seien $A, A_0, A_1, \ldots$ abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Mengen abzählbar sind.

(a) $A_0 \times A_1$, (b) $\prod_{i=0}^{n} A_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, (d) A^*.

Aufgabe 2

Die Kardinalität einer Menge A ist nicht größer als die einer Menge B (kurz: $|A| \leq |B|$), wenn eine injektive Funktion $f : A \to B$ existiert. Vergleichen Sie die Kardinalitäten folgender Mengen:

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Q}$ (c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (d) $\mathbb{R}$ (e) $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Hinweis: Sie können für die Vergleiche auch das folgende Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem benutzen: Sind $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektive Funktionen, dann gibt es auch eine Bijektion $h : A \to B$.

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{B}$ eine Struktur und $M \subseteq B$ eine Teilmenge des Universums. Die von M *erzeugte* Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist die kleinste Struktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $M \subseteq A$.

(a) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, +, \cdot)$ an (Addition und Multiplikation modulo 20), und geben Sie zu jeder Substruktur die kleinste Menge an, die diese erzeugt.

(b) Geben Sie die von $\{\frac{1}{n}\}$ erzeugte Substruktur der reellen Arithmetik $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ an.