Aufgabe 1

Untersuchen Sie für die unten angegebenen Tripel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, ob f (i) ein Homomorphismus, (ii) eine Einbettung und/oder (iii) ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

(a)
$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &:= (\mathbb{N}, \max, \min) \\ \mathfrak{B} &:= (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap) \\ f(n) &:= \{0, \ldots, n\} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &:= (\mathbb{R}, +, 0) \\ \mathfrak{B} &:= (\mathbb{R}^{>0}, \cdot, 1) \\ f(x) &:= e^x \end{aligned}$$

Aufgabe 2

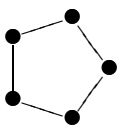
Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{B} := (\{0,1\}^*, \preceq)$, wobei $\preceq$ die Präfix-Relation auf Wörtern bezeichnet, d. h. $u \preceq v$ gdw. ein Wort $z \in \{0,1\}^*$ mit $uz = v$ existiert.

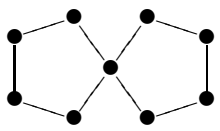
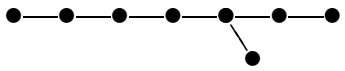
(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an.

(b) Geben Sie je einen starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an, oder beweisen Sie, dass es einen solchen nicht gibt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Automorphismengruppe der folgenden Graphen:

(a) 

(b) 

(c)