

### Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Ordnungen:

- (i)  $\mathfrak{A}_1 := (\{1, 2, 3, 4\}, <)$ ;      (iii)  $\mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$ ;  
 (ii)  $\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <)$ ;      (iv)  $\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <)$ .

Geben Sie für jede dieser Strukturen  $\mathfrak{A}_i$  einen Satz  $\varphi_i \in \text{FO}$  an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d.h.  $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$  und  $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$  für  $j \neq i$ .

### Aufgabe 2

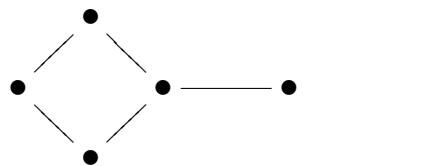
Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen in der jeweiligen Struktur nicht elementar definierbar sind:

- (a)  $\{-1, 1\}$  in  $(\mathbb{Z}, <)$ ;  
 (b) das offene Intervall  $(-1, 1)$  in  $(\mathbb{Q}, +)$ ;  
 (c) die Ordnung  $\leq$  in  $(\mathbb{Z}, +)$ ;  
 (d) die Menge der ungeraden Zahlen in  $(\mathbb{N}, \cdot)$ .

### Aufgabe 3

(a) Geben Sie Axiomensysteme für folgende Theorien an:

- (i) Die Theorie des Graphen



- (ii) Die Theorie der ungerichteten Graphen ohne Knoten mit ungeradem Grad.

(b) Welche der folgenden Theorien sind vollständig?

- (i) Die Theorie von  $(\mathbb{N}, +)$ ;  
 (ii) die Theorie der Graphen mit 4 Knoten;  
 (iii) die Theorie der zyklischen Graphen;  
 (iv) die Theorie der abzählbar unendlichen Cliques;  
 (v) die Theorie der dichten linearen Ordnungen?