

Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Ordnungen:

- (i) $\mathfrak{A}_1 := (\{1, 2, 3, 4\}, <)$;
- (ii) $\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <)$;
- (iii) $\mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$;
- (iv) $\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <)$.

Geben Sie für jede dieser Strukturen \mathfrak{A}_i einen Satz $\varphi_i \in \text{FO}$ an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 2

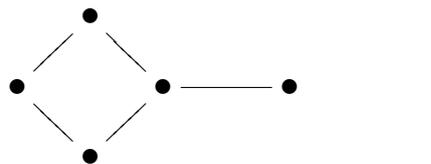
Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen in der jeweiligen Struktur nicht elementar definierbar sind:

- (a) $\{-1, 1\}$ in $(\mathbb{Z}, <)$;
- (b) das offene Intervall $(-1, 1)$ in $(\mathbb{Q}, +)$;
- (c) die Ordnung \leq in $(\mathbb{Z}, +)$;
- (d) die Menge der ungeraden Zahlen in (\mathbb{N}, \cdot) .

Aufgabe 3

(a) Geben Sie Axiomensysteme für folgende Theorien an:

- (i) Die Theorie des Graphen



- (ii) Die Theorie der ungerichteten Graphen ohne Knoten mit ungeradem Grad.

(b) Welche der folgenden Theorien sind vollständig?

- (i) Die Theorie von $(\mathbb{N}, +)$;
- (ii) die Theorie der Graphen mit 4 Knoten;
- (iii) die Theorie der zyklischen Graphen;
- (iv) die Theorie der abzählbar unendlichen Cliques;
- (v) die Theorie der dichten linearen Ordnungen?