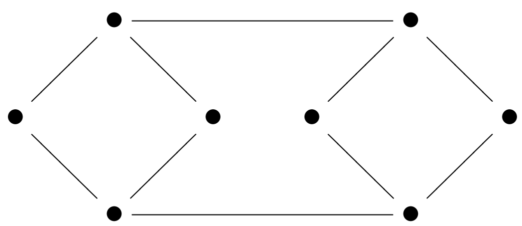
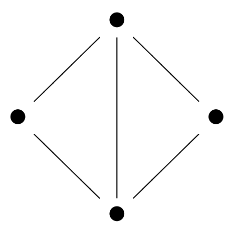
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die kleinste Zahl m, so dass der Herausforderer eine Gewinnstrategie im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und die Duplikatorin eine Gewinnstrategie im Spiel $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

(a) $\mathfrak{A}$



$\mathfrak{B}$



(b) $\mathfrak{A}$ $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ $\mathfrak{B}$ $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, |, 13)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, |, 15)$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie anhand von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein endlicher ungerichteter Zyklus $\mathfrak{C}_m = (C, E)$ existiert, so dass $\mathfrak{C}_m \equiv_m \mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{P} = (\mathbb{Z}, E)$ mit $E := \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ |i - j| = 1\}$ einen unendlich langen ungerichteten Pfad bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse aller azyklischen ungerichteten Graphen nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3*

Wir sagen, dass eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ *eine entscheidbare Theorie hat*, wenn man zu jedem FO-Satz ψ über τ algorithmisch entscheiden kann, ob $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt.

Zeigen Sie: Hat $(\mathbb{Z}, +, <)$ eine entscheidbare Theorie, so auch $(\mathbb{N}, +, <)$. Beweisen Sie dazu, dass man zu jedem FO-Satz ψ über der Signatur $\{+, <\}$ algorithmisch einen FO-Satz $\hat{\psi}$ über der gleichen Signatur konstruieren kann, so dass $(\mathbb{N}, +, <) \models \psi \Leftrightarrow (\mathbb{Z}, +, <) \models \hat{\psi}$.