**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

SS 2005

# 1. Übung Mathematische Logik II

Abgabe bis Mittwoch, den 20. 4. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

### Aufgabe 1

Beweisen Sie die Inkonsistenz der naiven Mengenlehre, indem Sie in der Ableitung der Russellschen Antinomie statt $x \notin x$ die Formel $\neg \exists y \, (x \in y \land y \in x)$ verwenden.

### Aufgabe 2

Zur Erinnerung: Wir bezeichenen durch $(x, y)$ das geordnete Paar $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$.

(a) Begründen Sie die Existenz von $(x, y)$ aus dem Paarmengenaxion.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ZFC} \models \forall x \forall y \forall x' \forall y' \, (x, y) = (x', y') \to (x = x' \land y = y')$.

(c) Werden durch $(x, y, z) := \big\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\big\}$ adäquat Tripel formalisiert?

### Aufgabe 3

Formalisieren Sie die folgenden Klassen, indem Sie jeweils eine FO[$\in$]-Formel $\varphi$ angeben, so dass $\{x \mid \varphi(x)\}$ das gesuchte Objekt ist:

(a) die Indentitätsfunktion auf $V$;

(b) die Funktion, die $x \in V$ auf $\bigcup x$ abbildet.

### Aufgabe 4

Sei $X$ eine Klasse von Mengen. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap X := \{z \mid (\forall x \in X) z \in x\}$$

genau dann eine Menge ist, wenn $X$ nicht leer ist.