Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

SS 2005

2. Übung Mathematische Logik II

Abgabe bis Mittwoch, den 27. 4. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Definieren Sie mit Hilfe des Rekursionstheorems die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen.

Aufgabe 2

$\mathrm{TC}(x)$, die *transitive Hülle* der Menge x, ist die kleinste transitive Menge, welche x umfasst. Zeigen Sie, dass $\mathrm{TC}(x)$ existiert und eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: Intuitiv ist $\mathrm{TC}(x) = x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \cdots$. Benutzen Sie das Rekursionstheorem für ω, um die Existenz einer Funktion f mit $\mathrm{Def}(f) = \omega$ und (geändert:) $\bigcup \mathrm{Bild}(f) = \mathrm{TC}(x)$ nachzuweisen.

Aufgabe 3

Sei X eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\bigcup X := \{y : (\exists z \in X)(y \in z)\} \quad \text{und} \quad \bigcap X := \{y : (\forall z \in X) y \in z)\}$$

Ordinalzahlen sind.

(b) Geben Sie $\bigcup X$ und $\bigcap X$ für $X = \{\emptyset\}$, $X = \{n \in \omega : n \text{ ungerade}\}$, $X = \omega$ und $X = \omega \cup \{\omega\}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ die kleinste Ordinalzahl β ist, so dass $\alpha \leq \beta$ für alle $\alpha \in X$.

(d) Geben Sie eine entsprechende Beschreibung von $\bigcap X$ an.

(e) Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha = \bigcup \alpha \iff \alpha$ ist Limeszahl.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass zu jeder Ordinalzahl α eine Limeszahl $\lambda > \alpha$ existiert.

Hinweis: Aufgrund des ω-Rekursionstheorems existiert eine Funktion f mit $f(0) = \alpha$ und $f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}$.

Aufgabe 5

Für lineare Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ und $\mathfrak{B} = (B, <)$ definiert man deren *geordnete Summe* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ als $(A \dot{\cup} B, <)$ mit $a < b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ (und $<$ auf A und B wie gehabt).

(a) Zeigen Sie, dass die geordnete Summe zweier Wohlordnungen wieder eine Wohlordnung ist.

(b) Für Ordinalzahlen α, β sei $\alpha + \beta$ die geordnete Summe von α und β. Zeigen Sie, dass diese Addition auf ω mit der üblichen Addition übereinstimmt.

(c) Gilt $1 + \alpha = \alpha + 1$ für unendliche Ordinalzahlen α?