Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

SS 2005

4. Übung Mathematische Logik II

Abgabe bis Mittwoch, den 11. 5. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass (auf der Basis von ZF) das Zornsche Lemma das Auswahlaxiom impliziert.

Hinweis: Sei x eine beliebige Menge. Wenden Sie das Zornsche Lemma auf die durch $\subsetneq$ partiell geordnete Menge $\{f : f$ ist Auswahlfunktion auf einer Teilmenge von $x\}$ an, um eine Auswahlfunktion auf x zu erhalten.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass alle natürlichen Zahlen sowie ω Kardinalzahlen sind.

(b) Zeigen Sie, dass alle unendlichen Kardinalzahlen Limeszahlen sind (d.h. dass $\alpha + 1 \sim \alpha$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$).

(c) Sind alle Limeszahlen Kardinalzahlen?

Aufgabe 3

Eine Menge x ist endlich, wenn $x \sim n$ für $n \in \omega$. Ein anderer Begriff von Endlichkeit wurde von Dedekind vorgeschlagen: Eine Menge x ist Dedekind-endlich, wenn keine echte Teilmenge von x gleichmächtig zu x ist. Zeigen Sie, dass eine Menge Dedekind-endlich ist genau dann, wenn sie endlich ist.

Zeigen Sie weiter, dass eine Menge x endlich ist, genau dann, wenn jede injektive Funktion $f : x \to x$ auch surjektiv ist.