Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

SS 2005

5. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 25.05. um 8:15 Uhr vor der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Die *Konfinalität* einer Ordinalzahl β, kurz $\mathrm{cf}(\beta)$ ist die kleinste Ordinalzahl α, so dass eine Abbildung $f : \alpha \to \beta$ existiert, deren Bild in β nicht beschränkt ist (d.h. für alle $\gamma \in \beta$ existiert ein $\delta \in \alpha$ mit $f(\delta) \geq \gamma$). Eine Ordinalzahl α is *regulär*, falls sie Limesordinalzahl ist und $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{cf}(\beta)$ für die Ordinale $\omega, \omega + \omega$ und für jede Nachfolgerordinalzahl.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\beta)$ die kleinste Ordinalzahl α ist, so dass es in β eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge $(\beta_i : i < \beta)$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass jede reguläre Ordinalzahl eine Kardinalzahl ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\aleph_0$ und alle Nachfolgerkardinalzahlen regulär sind.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$.

Aufgabe 2

Geben Sie eine Definition der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen an. Die reellen Zahlen kann man durch Dedekind-Schnitte definieren, d,h,

$$\mathbb{R} := \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : x \neq \emptyset \wedge x \neq \mathbb{Q} \wedge (\forall y \in x)(\forall z \in \mathbb{Q})(z < y \to z \in x\}$$

Zeigen Sie, dass $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Aufgabe 3

Wir definieren Ordinalzahlmultiplikation durch transfinite Iteration der Ordinalzahladdition und ordinale Exponentiation durch transfinite Iteration der Ordinalzahlmultiplikation wie folgt.

$$\begin{array}{ll} \alpha \cdot 0 = 0 & \alpha^0 = 1 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha & \alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha \cdot \beta & \alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta \end{array}$$

für alle Ordinale α,β und Limesordinale λ.

(a) Geben Sie die Kardinalität der Ordinalzahlen 2^ω und ω^ω (bezüglich der obigen ordinalen Exponentiation) an.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\beta \neq 0, 1$ und $\alpha \neq 0$ genau ein γ, $0 < \delta < \beta$ und $\varepsilon < \beta^\gamma$ existiert, so dass $\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \varepsilon$.

(c) Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl $\alpha > 0$ eindeutig zerlegt werden kann als

$$\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

mit $k \in \omega$, $\alpha > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots \gamma_k > 0$ und $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \omega$.

Aufgabe 4

Formulieren Sie (unter Verwendung geigneter Abkürzungen) die Kontinuumshypothese als Formel $\mathrm{CH} \in \mathrm{FO}(\{\in\})$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Kardinalität der folgenden Mengen

(a) $\{\alpha \in \mathsf{On} : \alpha \text{ ist ein Nachfolgerordinal } < \aleph_1\}$

(b) $\{\alpha \in \mathsf{On} : \alpha \text{ ist ein Limesordinal } < \aleph_1\}$

Aufgabe 6

Geben Sie eine Ordinalzahl α an, so dass $\mathrm{ZFC} \models \aleph_\alpha > 2^{\aleph_0}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\alpha \leq \aleph_\alpha$ für jede Ordinalzahl α.