Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

6. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 01.06. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Sei $\Phi = \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ in dieser Reihenfolge rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass $\Phi^{\models}$ bereits rekursiv axiomatisierbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\varphi_0, \varphi_0 \land \varphi_1, \ldots$.

Aufgabe 2

Geben Sie alle vollständigen Theorien der Sprache FO[σ] für folgende Signaturen σ an.

(a) $\sigma = \emptyset$,

(b) $\sigma = \{P\}$ mit unärem Prädikat P, bzw.

(c) $\sigma = \{c_1, \ldots, c_n\}$ für Konstantensymbole $c_1, \ldots, c_n$.

Aufgabe 3

Sei $\kappa \in \mathsf{Cn}^{\infty}$. Eine Theorie T heißt *κ-kategorisch* falls sie, bis auf Isomorphie, genau ein Modell der Kardinalität κ besitzt.

Sei σ ein abzählbare Signatur und $T \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Theorie mit folgenden Eigenschaften:

(i) alle Modelle von T sind unendlich,

(ii) T ist κ-kategorisch für irgendein $\kappa \in \mathsf{Cn}^{\infty}$.

Beweisen Sie, dass T vollständig ist.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende Theorien:

(a) die Theorie T_{dloo} der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte,

(b) die Theorie T_R des *Rado-Graphen*, axiomatisiert durch $\{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y Exy \to Eyx\}$ und die Menge Φ_E der *Erweiterungsaxiomen*

$$\Big\{\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \Big(\bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j \to \bigwedge_i x_i \neq y \land \bigwedge_{i \in H} Ex_i y \land \bigwedge_{i \notin H} \neg Ex_i y \Big) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}, H \subseteq \{1, \ldots, n\}\Big\}.$$

Beweisen Sie die Entscheidbarkeit dieser Theorien.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die obigen Theorien ω-kategorisch sind, indem Sie zwischen zwei beliebigen abzählbaren Modellen der jeweiligen Theorie einen Isomorphismus konstruieren.

Aufgabe 5

Geben Sie alle vollständigen Erweiterungen der Theorie der dichten linearen Ordnungen an.