Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

7. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 08.06. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Formalisieren Sie folgende Operationen in der Arithmetik:

(a) die Folge der ersten n Fakultäten, $TA \vdash F(u,n)$ gdw $u = \langle 1, 1, 2, 6, \dots, n! \rangle$;

(b) die Funktion Fakt, mit $TA \vdash \mathrm{Fakt}(n,m)$ gdw $m = n!$.

Verallgemeinern Sie dieses Beispiel für beliebige primitiv rekursive Funktionen.

Aufgabe 2

Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ drei Strukturen.

(a) Angenommen $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, zeigen Sie, dass wenn eine der beiden Strukturen endlich ist, dann sind sie zueinander isomorph.

(b) Sei nun $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$. Ist dann auch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$?

(c) Sei sowohl $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ als auch $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$. Ist in diesem Fall $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$?

Aufgabe 3

Sei T eine Theorie über der Signatur σ und sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen. Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt? Bitte Begründen sie Ihren Antworten.

(a) $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))) = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$,

(b) $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$,

(c) $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))) = \mathrm{Mod}(T)$,

(d) $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T)) = T$.

Aufgabe 4

Eine *elementare Kette* ist eine Folge $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ von Strukturen, mit $\mathfrak{A}_\gamma \preceq \mathfrak{A}_\beta$ für alle $\gamma < \beta < \alpha$. Sei $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine elementare Kette. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ für alle $\beta < \alpha$.