Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

8. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Dienstag, den 14.06. um 11:30 Uhr in der Übung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

(a) $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gdw. $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\vec{a}/\emptyset) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}(\vec{a}/\emptyset)$ für jedes Tupel $\vec{a}$ aus A.

(b) Wenn für alle endlichen Mengen $C \subseteq A$ und alle $b \in B$ ein Automorphismus f von $\mathfrak{B}$ existiert der C fest hält (d.h. $f(c) = c$ f.a. $c \in C$) und b nach $\mathfrak{A}$ abbildet ($f(b) \in A$), dann ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(c) Die Umkehrung von (b) gilt nicht.
(*Hinweis:* geben Sie ein Gegenbeispiel für $\mathfrak{A} = (\omega, <)$ an.)

(d) Aus $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ folgt nicht, dass $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gilt.
(*Hinweis:* geben Sie ein Gegenbeispiel für $\mathfrak{B} = (\omega, s)$ oder $\mathfrak{B} = (\omega, <)$ an.)

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur und sei $B \subseteq A$. Ein n-Typ p über B ist ein *Haupttyp* falls eine Formel $\varphi(\vec{x}) \in p$ existiert, so dass $\mathfrak{A}_B \models \forall \vec{x}(\varphi \rightarrow \psi)$ für jede Formel $\psi(\vec{x}) \in p$.

(a) Welche vollständigen 1-Typen von $(\omega, s, 0)$ bzw. $(\mathbb{Q}, <)$ sind Haupttypen?

(b) Zeigen Sie, dass ein vollständiger Typ p über B ein Haupttyp ist, falls ein Tupel $\vec{b} \subseteq B$ ihn realisiert.

(c) Beweisen Sie, dass alle Haupttypen von $\mathfrak{A}$ über B in $\mathfrak{A}$ realisiert sind.

Aufgabe 3

Sei T die Theorie der *Permutationsstrukturen* (A, f), mit bijektiver einstelliger Funktion f.

(a) Geben Sie alle vollständigen 1-Typen von T (d.h. von einem beliebigen Modell $\mathfrak{A} \models T$) über $\emptyset$ an.

(b) Welche dieser Typen sind Haupttypen?

(c) Welche Typen realisieren folgende Strukturen.

i. $\mathcal{Z} = \big(\mathbb{Z}, (z \mapsto z+1)\big)$

ii. $\mathcal{Z}_p = \left(\mathbb{Z}, \left(z \mapsto \begin{cases} z-p+1 & z \equiv -1 \pmod{p} \\ z+1 & \text{sonst} \end{cases}\right)\right)$

iii. $\mathcal{C}_{\mathrm{rot}} = \big(\mathbb{C}, (z \mapsto ze^{i|z|})\big)$

Sei $\mathfrak{A}$ wieder eine σ-Struktur und $X \subseteq A$ eine Teilmenge des Universums. Die durch X *generierte Substruktur* $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ ist die kleinste Substruktur, die alle Elemente von X enthält. Eine Substruktur heisst *endlich generiert*, falls sie von einer endlichen Menge von Elementen generiert wird.

Aufgabe 4

Seien $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen axiomatisiert durch die Theorie T (d.h. $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$) und $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

(1) $\mathfrak{A}$ ist einbettbar in ein Modell von T gdw. alle endlich generierten Substrukturen $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$ es sind.

(2) Sei $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter Substrukturen. Dann ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ gdw. alle endlich generierten Substrukturen $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{K}$.

(3) Alle linearen Ordnungen sind in eine dichte lineare Ordnung einbettbar.

(4) Alle abzählbaren linearen Ordnungen sind in $(\mathbb{Q}, <)$ einbettbar.

Hinweis: $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ist eine Einbettung (bzw. elementare Einbettung) gdw. $(\mathfrak{B}, f(A))$ ein Modell des Diagramms (bzw. elementaren Diagramms) von $\mathfrak{A}$ ist.