Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

9. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 22.06. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ genau dann, wenn alle Haupttypen von $\mathfrak{B}$ über A in $\mathfrak{A}$ realisiert sind (d.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ realisieren die gleichen Haupttypen über A).

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, P die Menge aller Primzahlen, und für jede Teilmenge $X \subseteq P$ sei $\Phi_X = \{\varphi_p(x) \mid p \in X\} \cup \{\neg\varphi_p(x) \mid p \notin X\}$, wobei jede Formel $\varphi_p(x)$ die Teilbarkeit von x durch p ausdrückt.

(a) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X ein Typ von $\mathfrak{N}$ über $\emptyset$?

(b) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X realisiert in $\mathfrak{N}$?

(c) Weisen Sie nach, dass eine elementare Erweiterung $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ mit einer *Nicht-Standard-Primzahl* $p \in M \setminus N$ (d.h. p hat genau zwei Teiler) existiert.

Aufgabe 3

Eine Theorie T heisst *modell-vollständig*, falls für beliebige Modelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von T mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ bereits $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gilt.

(a) Sei T modell-vollständig und sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T)$ endlich. Weisen Sie nach, dass $\mathfrak{A}$ keine echte Erweiterung $\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models T$ hat.

(b) Sind folgende Theorien modell-vollständig: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, s)$, $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$?

(c) Sei $\sigma = \{P\}$ die Signatur mit unärem Prädikat P. Welche vollständigen Theorien über σ sind modell-vollständig?

Aufgabe 4

Eine Theorie T erlaubt *Quantoren-Elimination* (QE), wenn für jede Formel $\varphi(\vec{x})$ eine quantorenfreie Formel $\vartheta(\vec{x})$ existiert, so dass $T \models \forall\vec{x}(\varphi \leftrightarrow \vartheta)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Theorie T QE erlaubt gdw. für jede quantorenfreie Formel $\psi(\vec{x}, y)$ eine quantorenfreie Formel $\vartheta(\vec{x})$ existiert, so dass $T \models \forall\vec{x}((\exists y \psi) \leftrightarrow \vartheta)$.

(b) Sei T eine Theorie, die QE erlaubt. Zeigen Sie, dass T modell-vollständig ist.

(c) Beweisen Sie, dass die Theorie T_{udloo} der unendlichen dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte QE erlaubt und damit modell-vollständig ist.