**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

# 10. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 29.06. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

### Aufgabe 1

Sei $\varphi$ ein beliebiger Satz. Zeigen Sie anhand des Satzes von Łos-Tarski die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) $\varphi$ bleibt unter Substrukturen erhalten (d.h. für jedes $\mathfrak{B} \models \varphi$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt auch $\mathfrak{A} \models \varphi$).

(ii) Es existiert ein $\Pi_1$-Satz $\psi$ mit $\varphi \equiv \psi$.

### Aufgabe 2

Welche der folgender Strukturen sind $\aleph_0$-saturiert?

(a) $(\mathbb{Q}, <)$;

(b) $(\mathbb{N}, <)$;

(c) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sim)$ mit folgender Äquivalenzrelation: $(i,k) \sim (j,l) \iff i+k = j+l$.

Geben Sie gegebenenfalls $\aleph_0$-saturierte elementare Erweiterungen an.

### Aufgabe 3

Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heisst *$\kappa$-homogen*, wenn es für jedes Paar von Folgen $\vec{a}, \vec{b} \in A^\lambda$ der Länge $\lambda < \kappa$ mit $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \vec{b})$ und jedes Element $d \in A$ ein Element $c \in A$ gibt, so dass $(\mathfrak{A}, \vec{a}, c) \equiv (\mathfrak{A}, \vec{b}, d)$. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ die $|A|$-homogen ist, nennen wir *homogen.*
Sei $\sigma$ eine Signatur und $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl mit $|\mathrm{FO}[\sigma]| < \kappa$. Beweisen Sie, dass eine $\sigma$-Struktur $\mathfrak{A}$ genau dann $\kappa$-saturiert ist, wenn sie $\kappa$-homogen und $\kappa$-universell ist.

### Aufgabe 4

Sei $T$ eine Theorie der Signatur $\sigma$ und seien $\varphi$,$\psi$ $\sigma$-Sätze. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) Es existiert ein $\Pi_1$-Satz $\vartheta$, so dass $T \models \varphi \rightarrow \vartheta$ und $T \models \vartheta \rightarrow \psi$.

(ii) Für alle Modelle $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$ von $T$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi$ impliziert $\mathfrak{A} \models \psi$.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\{\vartheta \in \Pi_1 \mid T \models \varphi \rightarrow \vartheta\}$.

### Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass eine Theorie $T$ genau dann modell-vollständig ist, wenn für jede Formel $\varphi(\vec{x})$ eine $\Sigma_1$-Formel $\psi(\vec{x})$ existiert mit $T \models \forall \vec{x}(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\{\psi(\vec{x}) \in \Sigma_1 \mid T \models \forall \vec{x}(\psi \rightarrow \varphi)\}$.